Berufsbildende Schule Wirtschaft I, Ludwigshafen am Rhein
Berufliches Gymnasium, Bildungsgang Wirtschaft

Abiturprüfung 2006 **Mathematik**
Leistungsfachanforderungen

Differential- und Integralrechnung / Nicht-rationale Funktionen

2. Aufgabe TEIL A

Gegeben sei folgende Funktion: $f_t(x) = \dfrac{2tx}{e^{tx^2}} \quad mit \quad t > 0$

Untersuchen Sie die Funktion bezüglich folgender Aufgabenstellungen:

1.) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen der Funktion folgendes Aussehen haben können:

$$f_t'(x) = \frac{2t}{e^{tx^2}} - 2tx \cdot f_t(x)$$

$$f_t''(x) = \frac{8t^3x^3 - 12t^2x}{e^{tx^2}}$$

Lösung:

$$f_t'(x) = \frac{2te^{tx^2} - 2tx \cdot e^{tx^2} \cdot 2tx}{\left(e^{tx^2}\right)^2} = \frac{2t - 2tx \cdot 2tx}{e^{tx^2}}$$

$$f_t'(x) = \frac{2t}{e^{tx^2}} - 2tx \cdot \frac{2tx}{e^{tx^2}} = \frac{2t}{e^{tx^2}} - 2tx \cdot f_t(x)$$

$$f_t''(x) = \frac{-8t^2x \cdot e^{tx^2} - \left(2t - 4t^2x^2\right) \cdot e^{tx^2} \cdot 2tx}{\left(e^{tx^2}\right)^2} = \frac{-8t^2x - 4t^2x + 8t^3x^3}{e^{tx^2}}$$

$$f_t''(x) = \frac{8t^3x^3 - 12t^2x}{e^{tx^2}}$$

2.) Untersuchen Sie die Funktion auf ihre Symmetrieeigenschaften.

Lösung:

$$f_t(-x) \quad = \quad \frac{2t(-x)}{e^{t(-x)^2}} \quad = \quad \frac{-2tx}{e^{tx^2}} \quad = \quad -\frac{2tx}{e^{tx^2}} \quad = \quad -f_t(x)$$

=> **Punktsymmetrie**

3.) Ermitteln Sie die Nullstelle(n) der Funktion.

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{2tx}{e^{tx^2}} \quad = \quad 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

4.) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

a) in Abhängigkeit von **t**.

b) für **t** = 2.

Lösung:

$$f_t'(x) \quad = \quad \frac{2t - 4t^2x^2}{e^{tx^2}} \quad \overset{!}{=} \quad 0 \quad \Rightarrow \quad |x| \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2t}} \quad = \quad \frac{\sqrt{2t}}{2t}$$

$$f_t''\left(\frac{\sqrt{2t}}{2t}\right) \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(\frac{\sqrt{2t}}{2t} \;\middle|\; \sqrt{\frac{2t}{e}}\right)$$

$$f_t''\left(-\frac{\sqrt{2t}}{2t}\right) \quad < \quad 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(-\frac{\sqrt{2t}}{2t} \;\middle|\; -\sqrt{\frac{2t}{e}}\right)$$

$$(wegen\ Punktsymmetrie)$$

für t = 2 gilt:

$$Max\left(\frac{1}{2} \;\middle|\; \sqrt{\frac{4}{e}}\right) \quad und \quad Min\left(-\frac{1}{2} \;\middle|\; -\sqrt{\frac{4}{e}}\right)$$

5.) Prüfen und beweisen Sie das Grenzwertverhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

Lösung:

$$\lim_{x \to \infty} f_t(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2tx}{e^{tx^2}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2t}{2tx \cdot e^{tx^2}} \to 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_t(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2tx}{e^{tx^2}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2t}{2tx \cdot e^{tx^2}} \to 0$$

oder wegen Punktsymmetrie

6.) Die Extremwertstelle der Menge aller Maxima sei mit $x = \frac{\sqrt{2t}}{2t}$ gegeben.

Bestimmen Sie nun die Ortskurve der Maxima.

Lösung:

$$x = \frac{\sqrt{2t}}{2t} \Rightarrow t = \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{2t}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2x^2}}{e}} = \sqrt{\frac{1}{e \cdot x^2}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{e}}$$

7.) Bilden Sie die Stammfunktion zu $f_t(x)$.

Lösung:

$$\int f_t(x)\,dx = \int \frac{2tx}{e^{tx^2}}\,dx \overset{Substitution}{=} \int \frac{1}{e^u}\,du \overset{\text{Resub.}}{=} -e^{-tx^2} + c$$

$$Substitution:$$

$$u := tx^2 \quad und \quad du := 2tx$$

$$\int f_t(x)\,dx = \frac{-1}{e^{tx^2}} + c$$

8.) Zeigen Sie, dass folgende Behauptung wahr ist:

Für $a \longrightarrow \infty$ ist die Fläche $\lim\limits_{a\to\infty}\int_0^a f_t(x)\,dx$ unabhängig von t und nimmt den Wert 1 an.

Lösung:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a f_t(x)\,dx \;=\; \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{e^{tx^2}}\right]_0^a \;=\; \lim_{a\to\infty}\left[\frac{-1}{e^{ta^2}}\right]+1 \;=\; 1$$

9.) Bestimmen Sie nun noch die 3 Schnittstellen zwischen $f_t(x)$ und $f_{t+1}(x)$.

Lösung:

$$f_t(x) \;=\; f_{t+1}(x) \;\Rightarrow\; \frac{2tx}{e^{tx^2}} \;=\; \frac{2(t+1)x}{e^{(t+1)x^2}}$$

$$\xrightarrow{\textit{Schnittstelle } S1} \; x=0 \;\Rightarrow\; y=0 \;\Rightarrow\; S_1(0\mid 0)$$

$$\xrightarrow{:x} \; \frac{2t}{e^{tx^2}} \;=\; \frac{2(t+1)}{e^{(t+1)x^2}} \;\xrightarrow{\cdot e^{tx^2}\,:2(t+1)}\; \frac{2t}{2(t+1)} \;=\; \frac{e^{tx^2}}{e^{(t+1)x^2}}$$

$$\xrightarrow{\textit{Umformung}} \; \frac{t}{t+1} \;=\; \left(\frac{e^t}{e^{t+1}}\right)^{x^2} \;\xrightarrow{\textit{Umformung}}\; \frac{t}{t+1} \;=\; \left(\frac{e^t}{e^t\cdot e}\right)^{x^2}$$

$$\xrightarrow{\textit{Umformung}} \; \frac{t}{t+1} \;=\; e^{-x^2} \;\xrightarrow{\textit{Umformung}}\; 1+\frac{1}{t} \;=\; e^{x^2}$$

$$\xrightarrow{\text{logarithmieren}} \; x^2 \;=\; \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \;\xrightarrow{\textit{Wurzel}}\; |\,x\,| \;=\; \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$