Übungen 1 – aus Online-Unterricht 29.04.2020

S. 188 – 1b

$$h(x)=5x\cdot e^x \quad \rightarrow \quad \int 5x\cdot e^x dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \quad \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)dx$$

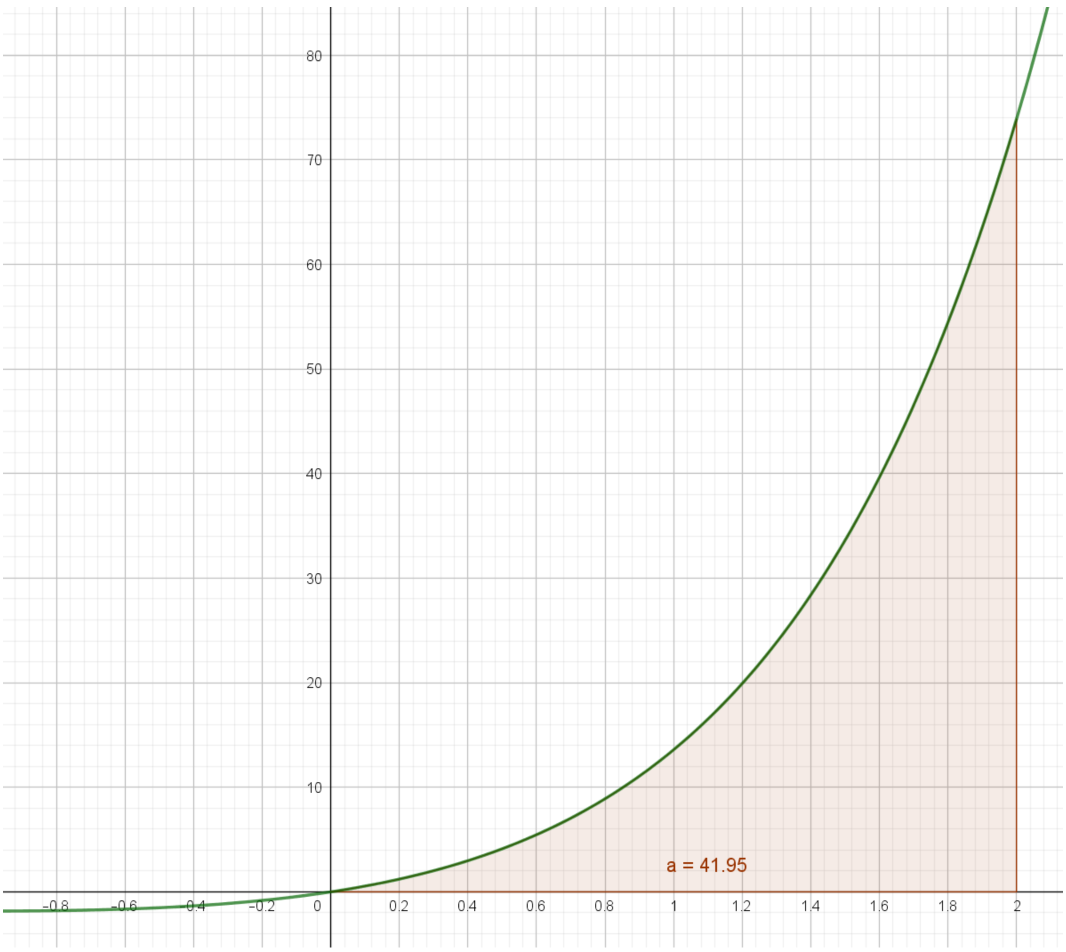
$$\text{Zuordnung}: \quad \begin{matrix} f(x)=5x & g(x)=e^x \\ f'(x)=5 & g'(x)=e^x \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \quad \int f(x)\cdot g'(x)dx \quad = \quad \int 5x\cdot e^x dx \quad = \quad 5x\cdot e^x-\int 5\cdot e^x dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \quad \int 5x\cdot e^x dx \quad = \quad 5x\cdot e^x-5\cdot e^x+c \quad = \quad 5(x-1)\cdot e^x \quad = \quad H(x)$$

$$\xrightarrow{\text{Grenzen einsetzen}} \quad \int_0^2 5x\cdot e^x dx \quad = \quad \left[5(x-1)\cdot e^x\right]_0^2 \quad = \quad 5\cdot e^2+5\cdot e^0 \quad = \quad 5\cdot\left(e^2+1\right)$$

Probe: $H'(x) \quad = \quad 5\cdot e^x+5(x-1)\cdot e^x \quad = \quad 5\cdot e^x+5x\cdot e^x-5\cdot e^x \quad = \quad 5x\cdot e^x \quad = \quad h(x)$



S. 188 – 1c

$$h(x) = x \cdot e^{2x} \quad \rightarrow \quad \int x \cdot e^{2x} dx \quad = \quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \quad \int f(x) \cdot g'(x)\, dx \quad = \quad f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

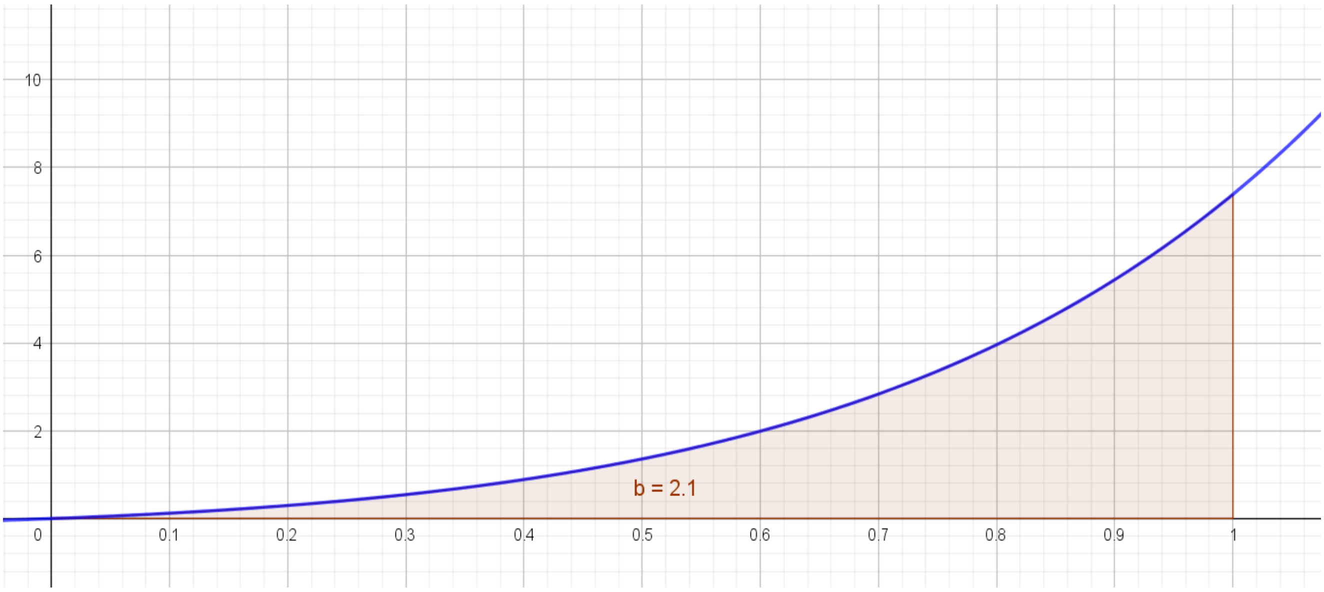
Zuordnung :
$$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$
$$f'(x) = 1 \qquad g'(x) = e^{2x}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \quad \int f(x) \cdot g'(x)\, dx \quad = \quad \int x \cdot e^{2x} dx \quad = \quad x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x} dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \quad \int x \cdot e^{2x} dx \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + c \quad = \quad \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{2x} \quad = \quad H(x)$$

$$\xrightarrow{\text{Grenzen einsetzen}} \quad \int_0^1 x \cdot e^{2x} dx \quad = \quad \left[\left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{2x}\right]_0^1 \quad = \quad \frac{1}{4} \cdot e^2 - \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot e^0 \quad = \quad \frac{1}{4}\left(e^2 + 1\right)$$

Probe: $H'(x) \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}\right) \cdot e^{2x} \quad = \quad \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + x \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot e^{2x} \quad = \quad x \cdot e^{2x}$



$$h(x) = x \cdot e^{-x} \quad \rightarrow \quad \int x \cdot e^{-x}\,dx \;=\; ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \quad \int f(x) \cdot g'(x)\,dx \;=\; f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\text{Zuordnung:} \quad \begin{array}{ll} f(x) = x & g(x) = -e^{-x} \\ f'(x) = 1 & g'(x) = e^{-x} \end{array}$$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \quad \int f(x) \cdot g'(x)\,dx \;=\; \int x \cdot e^{-x}\,dx \;=\; -x \cdot e^{-x} - \int 1 \cdot \left(-e^{-x}\right)dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \quad \int x \cdot e^{-x}\,dx \;=\; -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + c \;=\; (-x-1) \cdot e^{-x} + c \;=\; H(x)$$

Probe: $H'(x) \;=\; -e^{-x} - (-x-1) \cdot e^{-x} \;=\; -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \;=\; x \cdot e^{-x}$

Zum Üben: Übrige Aufgaben auf Seite 188

Zur Kontrolle: Lösungen der Aufgaben auf Seite 188

1 a) $h(x) = x;\; g'(x) = e^x;$

$$\int_{-1}^{1} x e^x dx = [x \cdot e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx = e + \tfrac{1}{e} - [e^x]_{-1}^{1}$$

$$= e + \tfrac{1}{e} - \left[e - \tfrac{1}{e}\right] = \tfrac{2}{e} \approx 0{,}736$$

b) $h(x) = 5x;\; g'(x) = e^x;$

$$\int_0^2 5x e^x dx = [5x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 5e^x dx$$

$$= 10e^2 - [5e^x]_0^2 = 10e^2 - [5e^2 - 5]$$

$$= 5e^2 + 5$$

$$\approx 41{,}945$$

c) $h(x) = x;\; g'(x) = e^{2x};$

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[x \cdot \tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= \tfrac{1}{2}e^2 - \left[\tfrac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4} \approx 2{,}097$$

d) $h(x) = 4x;\; g'(x) = e^{2x+2};$

$$\int_0^{0,5} 4x e^{2x+2} dx = \left[4x \cdot \tfrac{1}{2}e^{2x+2}\right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} 2e^{2x+2} dx$$

$$= e^3 - [e^{2x+2}]_0^{0,5} = e^2 \approx 7{,}389$$

2 a) $h(x) = x;\; g'(x) = \sin(x);$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,dx$$

$$= \pi - [-\sin(x)]_0^{\pi} = \pi$$

b) $h(x) = x;\; g'(x) = \cos(x);$

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

$$= -[-\cos(x)]_0^{\pi} = -2$$

c) $h(x) = x;\; g'(x) = \sin(2x);$

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin(2x)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2}x\cos(2x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$

$$= -\pi - \left[-\tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{2\pi} = -\pi$$

d) $h(x) = 2x;\; g'(x) = \sin(0{,}5x);$

$$\int_0^{2\pi} 2x \cdot \sin(0{,}5x)\,dx$$

$$= [-4x\cos(0{,}5x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -4\cos(0{,}5x)\,dx$$

$$= \pi - [-8\sin(0{,}5x)]_0^{2\pi} = 8\pi$$

3 $\int_0^1 \frac{\blacksquare}{e^{-x}}dx = \int_0^1 \blacksquare \cdot e^x dx$

Individuelle Lösungen, z.B.

1. Möglichkeit:

$\blacksquare = 0;\ \int_0^1 0 \cdot e^x dx = \int_0^1 0\, dx = 0$

2. Möglichkeit:

$\blacksquare$ ist eine Konstante mit $\blacksquare \neq 0$, z.B. $\blacksquare = 1$;

$\int_0^1 e^x dx = e - 1 \approx 1{,}718$

3. Möglichkeit:

$\blacksquare = x;\ \int_0^1 x e^x dx = 1$ (mit Produktintegration)

4. Möglichkeit: $\blacksquare = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$;

$\int_0^1 a x e^x dx = a$ (mit Produktintegration)

5. Möglichkeit:

$\blacksquare = e^x;\ \int_0^1 e^{2x} dx = 0{,}5e^2 - 0{,}5 \approx 3{,}195$

6. Möglichkeit: $\blacksquare = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$;

$\int_0^1 e^{(a+1)x} dx = \left[\frac{1}{a+1} e^{(a+1)x}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1}(e^{a+1} - 1)$

4 a) $F(x) = x \cdot e^x - e^x$

b) $F(x) = 2\sin(x) - 2x\cos(x)$

c) $F(x) = \cos(x) + x\sin(x)$

d) $F(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$

6 a) Nullstellen: $x_z = \ldots; -2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \ldots$; allgemein $x_z = z \cdot \pi$ mit $z \in \mathbb{Z}$.

b) $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_0^{\pi} = \pi;$

$A_{0;\pi} = \pi$

$\int_{\pi}^{2\pi} x\sin(x)\,dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_{\pi}^{2\pi} = -3$;

$A_{\pi;2\pi} = 3\pi$

$\int_{2\pi}^{3\pi} x\sin(x)\,dx = [\sin(x) - x\cos(x)]_{2\pi}^{3\pi} = 5\pi;$

$A_{2\pi;3\pi} = 5\pi$

Die Flächeninhalte über benachbarten Intervallen unterscheiden sich um 2π.

7 a) $2(e^2 - 1) \approx 12{,}7781$ (Stammfunktion F mit $F(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x + 2)$)

b) $4\pi \approx 12{,}5664$ (Stammfunktion F mit $F(x) = (x^2 - 2) \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$)

c) $\frac{15\,625}{168} \approx 93{,}0060$ (Stammfunktion F mit $F(x) = \frac{1}{168}(12x^2 + 10x + 5)(2x - 5)^5$)

d) $\pi^2 - 2\pi - 2 \approx 1{,}5864$

(Stammfunktion F mit

$F(x) = (2 - x^2) \cdot \cos(x + 1) + 2x \cdot \sin(x + 1)$)

8 a) $\int_0^{\pi} (\sin(x))^2 dx$

$= \left[\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cdot \cos(x))\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_{-1}^{1} (\cos(\pi x))^2 dx$

$= \left[\frac{1}{2\pi}(\pi x + \sin(\pi x) \cdot \cos(\pi x))\right]_{-1}^{1} = 1$

c) $\int_{-2}^{2} e^x \cdot \cos(x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))\right]_{-2}^{2}$

$= \frac{1}{2}\left[e^2 \cdot (\sin(2) + \cos(2))\right.$

$\left.- e^{-2} \cdot (\sin(-2) + \cos(-2))\right]$

d) $\int_0^2 e^{2x} \cdot \sin(\pi x)\,dx$

$= \left[\frac{e^{2x}}{\pi^2 + 4}(2 \cdot \sin(\pi x) - \pi \cdot \cos(\pi x))\right]_0^2$

$= \frac{\pi}{\pi^2 + 4}(1 - e^4)$

e) $\int_0^2 e^{-x} \cdot \cos(\pi x)\,dx$

$= \left[\frac{-e^{-x}}{\pi^2 + 1} \cdot (\cos(\pi x) + \pi \cdot \sin(\pi x))\right]_0^2$

$= \frac{1}{\pi^2 + 1} \cdot \left(\frac{e^2 - 1}{e^2}\right)$

f) $\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{e^{2x}} dx$

$= \left[-\frac{1}{\pi^2 + 4} \cdot e^{-2x} \cdot x(\pi \cdot \cos(\pi x) + 2 \cdot \sin(\pi x))\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{\pi^2 + 4} \cdot \left(\frac{e^2 + 1}{e^2}\right)$

9

a) $\int_1^e x\cdot\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)\right]_1^e = \frac{1}{4}(e^2+1)$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)$

b) $\int_1^e x\cdot\ln(2x)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2\left(\ln(2x)-\frac{1}{2}\right)\right]_1^e$

$= \frac{1}{2}\left(e^2\left(\ln(2)+\frac{1}{2}\right)-\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)\right)$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(2x)-\frac{1}{2}\right)$

c) $\int_1^{e^2} x^2\cdot\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)\right]_1^{e^2}$

$= \frac{1}{9}(5e^6+1)$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)$

d) $\int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$

S. 188 – 5

$$h(x) = x\cdot\cos(2x) \quad\rightarrow\quad \int x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad ???$$

$$\xrightarrow[\text{Partielle Integration}]{\text{Ansatz}} \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \quad=\quad f(x)\cdot g(x)-\int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

Zuordnung : $f(x)=x \quad g(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$f'(x)=1 \quad g'(x)=\cos(2x)$

$$\xrightarrow[\text{Zuordnung}]{\text{Durchführung}} \int f(x)\cdot g'(x)\,dx \quad=\quad \int x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad x\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)-\int 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \int x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad \frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)-\left[-\frac{1}{4}\cos(2x)\right]+c$$

$$\int x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad \frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)+\frac{1}{4}\cdot\cos(2x)+c \quad=\quad H(x)$$

$$\xrightarrow{\text{Grenzen einsetzen}} \int_0^\pi x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad \left[\frac{1}{2}x\cdot\sin(2x)+\frac{1}{4}\cdot\cos(2x)\right]_0^\pi$$

$$\int_0^\pi x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad \left[\frac{1}{2}\pi\cdot\sin(2\pi)+\frac{1}{4}\cdot\cos(2\pi)\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\sin(0)+\frac{1}{4}\cdot\cos(0)\right]$$

$$\int_0^\pi x\cdot\cos(2x)\,dx \quad=\quad \left[\frac{1}{2}\pi\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 1\right]-\left[0+\frac{1}{4}\cdot 1\right] \quad=\quad 0$$

Probe: $H'(x) \quad=\quad \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)+2\cdot\frac{1}{2}x\cdot\cos(2x)-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(2x)$

$$=\quad \frac{1}{2}\cdot\sin(2x)+x\cdot\cos(2x)-\frac{1}{2}\cdot\sin(2x) \quad=\quad x\cdot\cos(2x) \quad=\quad h(x)$$