Integrale und Integralrechnung

Unbestimmtes Integral

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Menge der Stammfunktionen

a) $\int (3x+4)\,dx =$

b) $\int \left(4x^3+5x^2+x-5\right)dx =$

c) $\int 4\cdot\sin(x)\,dx =$

d) $\int \left[\frac{1}{2}x^2-\cos(x)\right]dx =$

e) $\int \left(\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx =$

f) $\int 3e^x dx =$

g) $\int 0dx =$

h) $\int x^{\pi}\cdot a^2\cdot u\;du =$

i) $\int x^{\pi}\cdot a^2\cdot u\;da =$

j) $\int x^{\pi}\cdot a^2\cdot u\;dx =$

k) $\int 3te^x dt =$

l) $\int \left(3x^2+5e^{2x}\right)dx =$

m) $\int \left[\sin(x)-\cos(x)\right]dx =$

n) $\int \left(\frac{2}{5}x^3-\frac{e}{x}\right)dx =$

o) $\int \frac{3x^2-4x+7}{x}dx =$

p) $\int 5\pi\cdot\frac{1}{2}edx =$

q) $\int \frac{2x^4-5x^3-4x^2+6x-8}{2x^2}dx =$

r) $\int \left(3x^{\pi^2}-e^{2\pi x}+5e^{\pi}\right)dx =$

s) $\int \left(t^2-2\right)^2 dx =$

t) $\int \left(t^2-2\right)^2 dt =$

u) $\int (x-2)(2x+4)\,dx =$

v) $\int \left(\sqrt{z}-\sqrt[3]{x^2}\right)dz =$

Lösungen:

a) $\int (3x+4)\,dx = \frac{3}{2}x^2+4x+c$

b) $\int \left(4x^3+5x^2+x-5\right)dx = x^4+\frac{5}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+c$

c) $\int 4\cdot\sin(x)\,dx = -4\cos(c)+c$

d) $\int \left[\frac{1}{2}x^2-\cos(x)\right]dx = \frac{1}{6}x^3-\sin(x)+c$

e) $\int \left(\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = 5\ln|x|+\frac{2}{x}+c$

f) $\int 3e^x dx = 3e^x+c$

g) $\int 0dx = c$

h) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\, du = x^{\pi} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}u^2 + c$

i) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\, da = x^{\pi} \cdot \frac{1}{3}a^3 \cdot u + c$

j) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\, dx = \frac{1}{\pi+1}x^{\pi+1} \cdot a^2 \cdot u + c$

k) $\int 3te^x dt = \frac{3}{2}t^2 e^x + c$

l) $\int \left(3x^2 + 5e^{2x}\right)dx = x^3 + \frac{5}{2}e^{2x} + c$

m) $\int \left[\sin(x) - \cos(x)\right]dx = -\cos(x) - \sin(x) + c$

n) $\int \left(\frac{2}{5}x^3 - \frac{e}{x}\right)dx = \frac{1}{10}x^4 - e \cdot \ln|x| + c$

o) $\int \frac{3x^2 - 4x + 7}{x}dx = \int \left(3x - 4 + \frac{7}{x}\right)dx = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 7 \cdot \ln|x| + c$

p) $\int 5\pi \cdot \frac{1}{2}edx = x \cdot 5\pi \cdot \frac{1}{2}e + c$

q) $\int \frac{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 6x - 8}{2x^2}dx = \int \left(x^2 - \frac{5}{2}x - 2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 2x + 3 \cdot \ln|x| + \frac{4}{x} + c$

r) $\int \left(3x^{\pi^2} - e^{2\pi x} + 5e^{\pi}\right)dx = \frac{3}{\pi^2+1}x^{\pi^2+1} - \frac{1}{2\pi}e^{2\pi x} + 5e^{\pi} \cdot x + c$

s) $\int \left(t^2 - 2\right)^2 dx = \left(t^2 - 2\right)^2 \cdot x + c$

t) $\int \left(t^2 - 2\right)^2 dt = \int \left(t^4 - 4t^2 + 4\right)dt = \frac{1}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + 4t + c$

u) $\int (x-2)(2x+4)dx = \int \left(2x^2 - 8\right)dx = \frac{2}{3}x^3 - 8x + c$

v) $\int \left(\sqrt{z} - \sqrt[3]{x^2}\right)dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - z \cdot \sqrt[3]{x^2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{z^3} - z \cdot \sqrt[3]{x^2} + c$

Aufgabe 2: Stammfunktionen mit etwas „Würze“

Ermitteln Sie die Funktion, deren Graph durch den Punkt P(3 / -4) geht und deren Steigungsfunktion $t(x) = 2x(x-3)$ lautet.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{l} t(x) = 2x(x-3) \rightarrow f'(x) = 2x^2 - 6x \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + c \\ \rightarrow f(3) = \frac{2}{3} \cdot 27 - 3 \cdot 9 + c = -4 \rightarrow -9 + c = -4 \rightarrow c = 5 \end{array}\right\} \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 5$$

Aufgabe 3: Rekonstruktion mal anders – Bestimmen Sie unter Beachtung der Zusatzbedingungen die entsprechende Stammfunktion:

a) $f(-2)=-8 \qquad f'(2)=8 \qquad f''(x)=4x$

Lösung:

$$f''(x)=4x \;\rightarrow\; f'(x)=2x^2+c \;\rightarrow\; f'(2)=2\cdot 4+c=8 \;\rightarrow\; c=0$$

$$\rightarrow\; f'(x)=2x^2+0 \;\rightarrow\; f(x)=\frac{2}{3}x^3+d \;\rightarrow\; f(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-8)+d=-8$$

$$\rightarrow\; d=-\frac{8}{3} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}$$

b) $f(-1)=-4 \qquad f'(1)=8 \qquad f''(x)=(x+1)(x-2)$

Lösung:

$$f''(x)=x^2-x-2 \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c \;\rightarrow\; f'(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2+c=8$$

$$\rightarrow\; c=\frac{61}{6} \;\rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{61}{6} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{61}{6}x+d$$

$$\rightarrow\; f(-1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}-1-\frac{61}{6}+d=-4 \;\rightarrow\; d=\frac{83}{12} \;\rightarrow\; f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{61}{6}x+\frac{83}{12}$$

c) $f(1)=2\cdot f(4) \qquad f'(9)=2 \qquad f''(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Lösung:

$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}} \;\rightarrow\; f'(x)=2x^{\frac{1}{2}}+c=2\sqrt{x}+c \;\rightarrow\; f'(9)=2\cdot 3+c=2 \;\rightarrow\; c=-4$$

$$\rightarrow\; f'(x)=2\sqrt{x}-4 \;\rightarrow\; f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x+d=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-4x+d$$

$$\xrightarrow{\vec{f}(1)=2\cdot f(4)} \frac{4}{3}-4+d=2\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt{64}-4\cdot 4+d\right) \;\rightarrow\; -\frac{8}{3}+d=-\frac{32}{3}+2d \;\rightarrow\; d=8$$

$$\rightarrow\; f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x+8=\frac{4}{3}\sqrt{x^3}-4x+8$$

d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad f'(-\pi)=1 \qquad f''(t)=\sin(t)$

Lösung:

$$f''(t)=\sin(t) \;\rightarrow\; f'(t)=-\cos(t)+c \;\rightarrow\; f'(-\pi)=-\cos(-\pi)+c=1 \xrightarrow{-1\cdot(-1)+c} c=0$$

$$\rightarrow\; f'(t)=-\cos(t) \;\rightarrow\; f(t)=-\sin(t)+d \;\rightarrow\; f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+d=0 \;\rightarrow\; d=1$$

$$\rightarrow\; f(t)=-\sin(t)+1$$

Aufgabe 4: Stammfunktion verkleidet als Textaufgabe

Ein auf Riff gelaufener zylinderförmiger Tank verliert Rohöl durch ein Leck, wobei ein kreisförmiger Ölteppich entsteht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kann funktional in etwa gemessen werden durch:

$\frac{df(t)}{dt} = \frac{8}{\sqrt{t}}$ $mit\ t > 1$, $f(t)$ ist hierbei der Radius des Ölteppichs in Metern nach t Minuten.

Nach einer Minute beträgt der Radius bereits 15 m.
Welchen Radius muss man nach 49 Minuten erwarten?
Nach welcher Zeit würde der Ölteppich einen Radius von 100 m besitzen?

Lösung:

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \frac{8}{\sqrt{t}} = 8\cdot t^{-\frac{1}{2}} \to f(t) = 16\cdot t^{\frac{1}{2}} + c = 16\cdot\sqrt{t} + c \xrightarrow{f(1)=15} 16\cdot 1 + c = 15 \to c = -1$$

$$\to f(t) = 16\cdot t^{\frac{1}{2}} - 1 = 16\cdot\sqrt{t} - 1$$

$$\xrightarrow{\text{Radius nach 49 Minuten}} f(49) = 16\cdot 7 - 1 = 111$$

$$\xrightarrow{\text{Zeit für Radius = 100 m}} f(t) = 16\cdot\sqrt{t} - 1 = 100 \to \sqrt{t} = \frac{101}{16} \to t = \left(\frac{101}{16}\right)^2 \approx 39{,}85[\min] \approx 39[\min]51[sek]$$

Aufgabe 5: Weg – Geschwindigkeit - Beschleunigung

Die Beschleunigung eines startenden Autos reduziert mit abgelaufener Zeit linear.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei die Beschleunigung $a = 4\frac{m}{s^2}$; nach 10 Sekunden beträgt die Beschleunigung nur noch $a = 2\frac{m}{s^2}$

a) Wie lautet der (lineare) Funktionsterm $a(t)$ für den Beschleunigungsvorgang in Abhängigkeit der Zeit t?

Lösung:

$$Gegeben:\ a(0) = 4\frac{m}{s^2} \wedge a(10) = 2\frac{m}{s^2} \wedge a(t) = k\cdot t + b$$

$$\left.\begin{aligned} a(0) &= k\cdot 0 + b = 4 \to b = 4 \\ a(10) &= k\cdot 10 + 4 = 2 \to k = -0{,}2 \end{aligned}\right\} a(t) = -0{,}2\cdot t + 4$$

b) Ermitteln Sie sodann $v(t) = \int a(t)\,dt$ und $s(t) = \int v(t)\,dt$ unter Berücksichtigung, dass Geschwindigkeit v und zurückgelegter Weg s im Start jeweils den Wert 0 besitzen.

Lösung:

$$v(t) = \int a(t)\,dt \quad und \quad s(t) = \int v(t)\,dt \quad mit \quad a(t) = -0{,}2\cdot t + 4$$

$$v(t) = \int_0^t (-0{,}2\cdot x + 4)\,dx = -0{,}1\cdot t^2 + 4\cdot t - 0 = -0{,}1\cdot t^2 + 4\cdot t$$

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int_0^t (-0{,}1\cdot x^2 + 4\cdot x)\,dx = -\frac{1}{30}\cdot t^3 + 2\cdot t^2 - 0 = -\frac{1}{30}\cdot t^3 + 2\cdot t^2$$

c) Welche Geschwindigkeit erreicht das Fahrzeug nach 10 Sekunden und welchen Weg hat es bis dahin zurückgelegt?

Lösung:

$$v(10) = -0{,}1\cdot 100 + 4\cdot 10 = 30 \quad und \quad s(10) = -\frac{1}{30}\cdot 100 + 2\cdot 100 = 166\frac{2}{3}$$