

Integrale und Integralrechnung

Mathematische Hintergründe:

- (1) Lehrbuch S. 161 – 205
- (2) Integrieren: <https://www.mathe-online.at/mathint/int/i.html>
- (3) Informationen zum Lesen und mit Beispielen
<https://de.serlo.org/mathe/funktionen/stammfunktion,-integral-flaechenberechnung>

oder etwas umfangreicher mit den meisten Themen der Analysis (Schwerpunkt: Funktionen) in der Oberstufe: <https://de.serlo.org/mathe/funktionen>

Und noch etwas besonders Hilfreiches:

Integrale online berechnen – mit Rechenweg und graphischer Veranschaulichung
<https://www.integralrechner.de/>

Ableitungen online berechnen – mit Rechenweg und graphischer Veranschaulichung
<https://www.ableitungsrechner.net/>

Interessante Webseite zum sich Informieren und Weiterbilden:

Mathematik: <http://groolfs.de/>
Informatik / Informationsverarbeitung: <http://groolfs.de/informatik.html>

Tabelle von Stammfunktionen:

| Nr. | Funktion $f(x)$ | Stammfunktion $F(x)$ |
|-----|-----------------------------|------------------------------------|
| 1 | $f(x) = 0$ | $F(x) = c$ |
| 2 | $f(x) = a$ | $F(x) = ax + c$ |
| 3 | $f(x) = x^n$ | $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ |
| 4 | $f(x) = \sin(x)$ | $F(x) = -\cos(x) + c$ |
| 5 | $f(x) = \cos(x)$ | $F(x) = \sin(x) + c$ |
| 6 | $f(x) = e^{kx}$ | $F(x) = \frac{1}{k} e^{kx} + c$ |
| 7 | $f(x) = \frac{1}{x}$ | $F(x) = \ln x + c$ |
| 8 | $f(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$ | $F(x) = \ln h(x) + c$ |
| 9 | $f(x) = \ln(x)$ | $F(x) = x \cdot \ln(x) - x + c$ |

Übersicht – Regeln zum Integral

⇒ <https://mathepedia.de/Integrationsregeln.html>

Eigenschaften – Gesetzmäßigkeiten und Rechenregeln:

(1) Obere Grenze = Untere Grenze:
$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

(2) Umkehren der Grenzen: Vorzeichenregel

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -F(a) + F(b) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x) dx$$
$$\xrightarrow{\text{kurz:}} \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

(3) Linearität 1: Konstanter Faktor

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k \cdot [F(b) - F(a)] = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$
$$\xrightarrow{\text{kurz:}} \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

(4) Linearität 2: Linearität bei algebraischen Summen

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x) \pm h(x)] dx = F(b) \pm G(b) \pm H(b) - [F(a) \pm G(a) \pm H(a)]$$
$$= F(b) - F(a) \pm G(b) \mp G(a) \pm H(b) \mp H(a)$$
$$= [F(b) - F(a)] \pm [G(b) - G(a)] \pm [H(b) - H(a)]$$
$$= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \pm \int_a^b h(x) dx$$
$$\xrightarrow{\text{kurz:}} \int_a^b [f(x) \pm g(x) \pm h(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \pm \int_a^b h(x) dx$$

(5) Monotonieeigenschaft: $\forall x \in [a; b] \text{ gilt: } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(6) Symmetrieeigenschaft:

(i) Punktsymmetrie zum Ursprung:
$$\int_{-a}^a f(x) dx = F(a) - F(-a) = 0$$

(ii) Achsensymmetrie:
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$$

(7) Betrag eines Integrals:
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Volumen von Drehkörpern:

Rotation des Schaubildes von $f(x)$...

... um die x-Achse: $V_a^b = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$

... um die y-Achse: $V_c^d = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2 dy = \pi \cdot \int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy \stackrel{f'(x)=\frac{dy}{dx}}{=} \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x) dx$

Bogenlänge: $s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Mantelfläche: $M_a^b = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$