Übungen: Mathematik
zur Klausurvorbereitung (erweitert)

Jürgen Meisel
Mathematik

1.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 10$$

b) Ermitteln Sie die **Konsumenten- und Produzentenrente** bei x = 3.

2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils erste (partielle) Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^3\sqrt{(x-1)}$

b) $f(x,y) = \frac{1}{2}xy^2 \cdot e^{\sqrt{2x+3y}}$

c) $f(x,y) = x^2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt[4]{y}$

d) $f(x,y) = \frac{1}{4}x^{0,2}y^{0,8}$

3.) **Optimum ohne Nebenbedingungen und totales Differential**

Eine Ackerfläche wird mit Getreide bestellt. Zuvor wird Kunstdünger der Sorte S1 in x Mengeneinheiten, der Sorte S2 in y Mengeneinheiten und der Sorte S3 in z Mengeneinheiten ausgestreut. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Landwirt, dass der Ertrag in Abhängigkeit der Düngung durch folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$f(x,y,z) = 490 + 3x + 3y - \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}z^2 + xy + 2xz$$

a) Wie muss der Landwirt den Acker düngen, damit er einen maximalen Ertrag erzielt? Wie hoch ist der maximal erreichbare Ertrag?

b) Wie ändert sich der Ertrag, wenn der Landwirt den Düngereinsatz von (x,y,z) = (10,10,10) auf (x,y,z) = (9,11,8) ändert?

(i) Totales Differential
(ii) Genaue Lösung mittels Einsetzen in die Funktion

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift

$$f_t(x) = -x^3 + tx^2 - x \qquad mit \quad t > 0$$

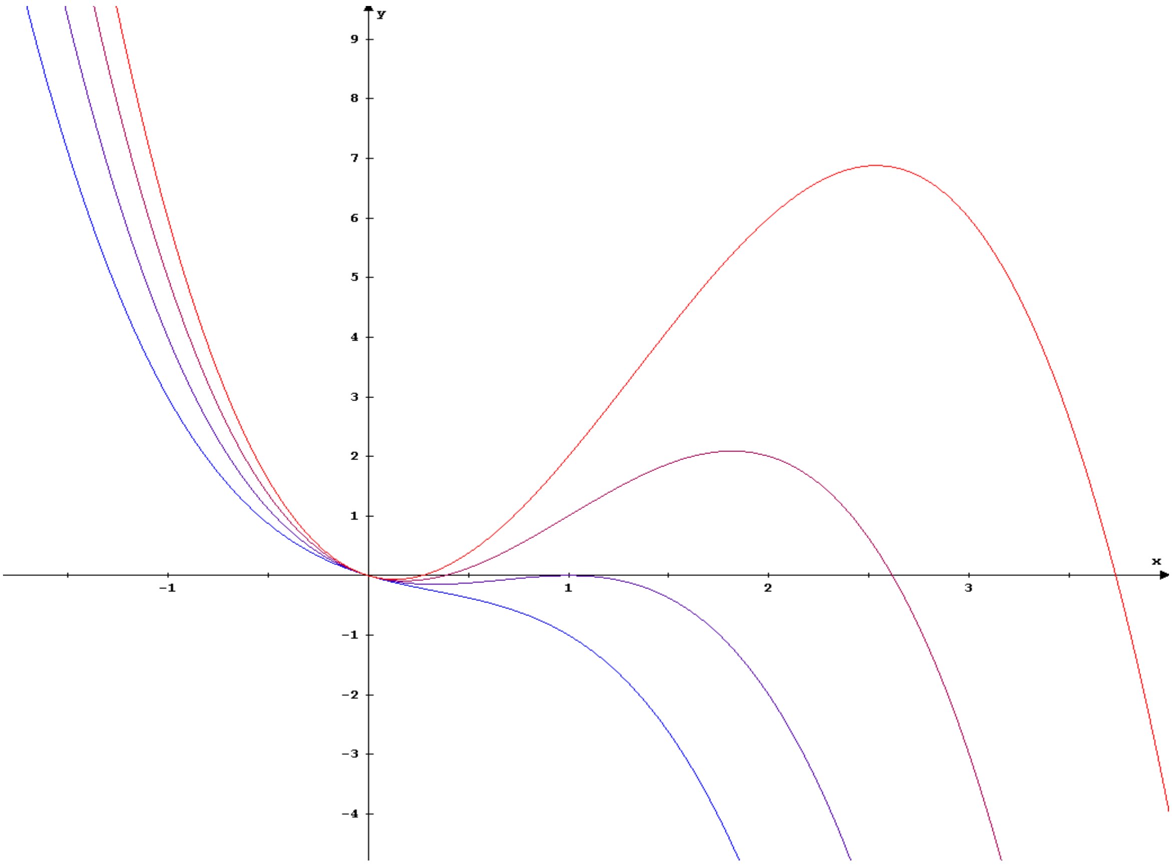
nach folgenden Kriterien:

a) Definitionsbereich, Symmetrie **und** Nullstellen

b) Ermitteln Sie die ersten drei Ableitungen der Funktion.

c) Berechnen Sie das Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to \pm\infty$.

d) Für welche vier Werte von t wurde die Funktion $f_t(x)$ hier abgebildet?



e) Welche Fläche schließt die Funktion $f_2(x)$ mit der x-Achse ein?

f) Ermitteln Sie die Extrema und Wendepunkte der Funktion $f_2(x)$

5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + 4y$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

b) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = \frac{1}{4}x^{0,4}y^{0,6}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 2 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 6 €. Das Budget beträgt insgesamt 500 €.

Wie viel kann im optimalen Fall produziert werden?

6.) **Simplexalgorithmus**

Ein Gemüsebauer hat für den Anbau von Möhren und Gurken insgesamt 20 ha Land zur Verfügung. Davon sollen aber höchstens 12 ha für Möhren und höchstens 15 ha für Gurken verwendet werden. Die Pflege der Äcker bindet bei Möhren 4 Arbeitstage und bei Gurken 2 Arbeitstage pro ha. Mehr als 60 Arbeitstage können nicht verbraucht werden.

Der Gewinn pro ha ist bei Möhren 50 % höher als bei Gurken, für Gurken erzielt man einen Gewinn von 4,00 €.

a) Bilden Sie alle Nebenbedingungen und die Zielfunktion.

b) Lösen Sie die Aufgabe graphisch.

c) Lösen Sie die Aufgabe rechnerisch.

7.) Investitionsrechnung

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitionsentscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 10.000,00 €.

Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 3.000 € (Jahr 1), 3.000 € (Jahr 2), 4.000 € (Jahr 3) und 4.000 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 6.000 € (Jahr 3) und 9.000 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 6 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

b) Wie hoch müsste der Betrag im Jahr 4 des Projektes II sein, damit die beiden Kapitalwerte gleich hoch sind?

c) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I?

(Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösungen:

Aufgabe 1:

Marktgleichgewicht:

$$\frac{2}{3}x^2+1 = -\frac{1}{3}x^2+10$$

$$\xrightarrow{+\frac{1}{3}x^2-1} \quad x^2=9 \quad \xrightarrow{\sqrt{\ }} \quad |x|=3$$

$$p_A(3)=\frac{2}{3}\cdot 9+1=7 \quad \Rightarrow \quad M(3 \mid 7)$$

Konsumentenrente:

$$K_R = \int_0^3\left(-\frac{1}{3}x^2+10\right)dx-3\cdot 7$$

$$K_R = \left[-\frac{1}{9}x^3+10x\right]_0^3-21$$

$$K_R = 6$$

Produzentenrente:

$$P_R = 3\cdot 7-\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)dx$$

$$P_R = 21-\left[\frac{2}{9}x^3+x\right]_0^3$$

$$P_R = 12$$

Aufgabe 2: Ableitungen

a) $$f'(x)=3x^2\sqrt{x-1}+x^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

b)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{2}y^2\cdot e^{\sqrt{2x+3y}}+\frac{1}{2}xy^2\cdot e^{\sqrt{2x+3y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+3y}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xy\cdot e^{\sqrt{2x+3y}}+\frac{1}{2}xy^2\cdot e^{\sqrt{2x+3y}}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}$$

c)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{2}{3}x\cdot\sqrt[4]{y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{12}x^2\cdot y^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{\sqrt[4]{y^3}}$$

d)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{20}\cdot\frac{y^{0,8}}{x^{0,8}} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{5}\cdot\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}$$

Aufgabe 3:

a)

$$f(x,y,z) = 490+3x+3y-\frac{11}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}z^2+xy+2xz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 3-11x+y+2z \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 3-y+x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y=x+3$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = -\frac{1}{2}z+2x \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad z=4x$$

$$\text{eingesetzt in } \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}: \quad \Rightarrow \quad x=3 \quad \Rightarrow \quad y=6 \quad \Rightarrow \quad z=12$$

Hesse-Matrix:

$$H\left[f(x,y,z)\right] = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Auswertung:

$$H_1 = -11 < 0$$

$$H_2 = Det\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 10 > 0$$

$$H_2 = Det\begin{pmatrix} -11 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (-1) < 0$$

$$\Rightarrow negativ\ definit \quad \Rightarrow \quad Max(3 \mid 6 \mid 12 \mid 503{,}5)$$

b)

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz$$

$$df(x,y,z) = (3-11x+y+2z)\cdot dx + (3-y+x)\cdot dy + \left(-\frac{1}{2}z+2x\right)\cdot dz$$

$$dx = 9-10 = (-1) \qquad dy = 11-10 = 1 \qquad dz = 8-10 = (-2)$$

$$df(10{,}10{,}10) = (-77)\cdot(-1)+3\cdot 1+15\cdot(-2)$$

$$df(10{,}10{,}10) = 50$$

$$\Delta f = f(9{,}11{,}8) - f(10{,}10{,}10)$$

$$\Delta f = 271 - 225$$

$$\Delta f = 46$$

Aufgabe 4:

a) $D = \Re$; keine Symmetrie wegen Hochzahlen;

Nullstelle:

$$f_t(x) = x\left(-x^2 + tx - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{-2}$$

b)

$$f_t'(x) = -3x^2 + 2tx - 1$$

$$f_t''(x) = -6x + 2t$$

$$f_t'''(x) = -6$$

c) Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f_t(x) \to -\infty$

Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_t(x) \to \infty$

d) Graph 1: t = {1, 2, 3, 4}

e) Fläche mit x-Achse: => Nullstellen von $f_2(x)$: 0 und 1

$$\left|\int_0^1 \left[f_t(x)\right] dx\right| = \left|\int_0^1 \left(-x^3 + 2x^2 - x\right) dx\right|$$

$$= \left|\left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{12}$$

e) Extrema: Minimum $\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, -\frac{4}{27}\right)$ Maximum $(1 \mid 0)$

Wendepunkt: W $\left(\frac{2}{3} \,\middle|\, -\frac{2}{27}\right)$

Aufgabe 5:

a) $$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + 4y$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^3 + x \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{x(x^2+1)=0} \quad x = 0$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y^2 + 4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2 \quad \wedge \quad y_2 = -2$$

Stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 2) \quad \wedge \quad S_2(0 \mid -2)$

Hesse-Matrix: $$H\left[f(x,y)\right] = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & 0 \\ 0 & -2y \end{pmatrix}$$

$$H\left[f(0,2)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1 \textit{ ist Sattelpunkt}$$

Auswertung: $$H\left[f(0,-2)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_2 \textit{ ist Minimum}$$

b) Ansatz: $$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(500 - 2x - 6y)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = \frac{1}{10}\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 2\lambda \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \quad \lambda = \frac{1}{20}\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = \frac{3}{20}\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 6\lambda \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \quad \lambda = \frac{1}{40}\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} \quad \frac{1}{20}\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} = \frac{1}{40}\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} \quad \xrightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} \quad y = \frac{1}{2}x$$

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB}} \quad x = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 50$$

$$\Rightarrow \quad q(100 \mid 50) = \frac{1}{4} \cdot 100^{0,4} \cdot 50^{0,6}$$

Aufgabe 6:

a)

<u>Bedingungen:</u> **x = Anbaufläche Möhren und y = Anbaufläche Gurken**

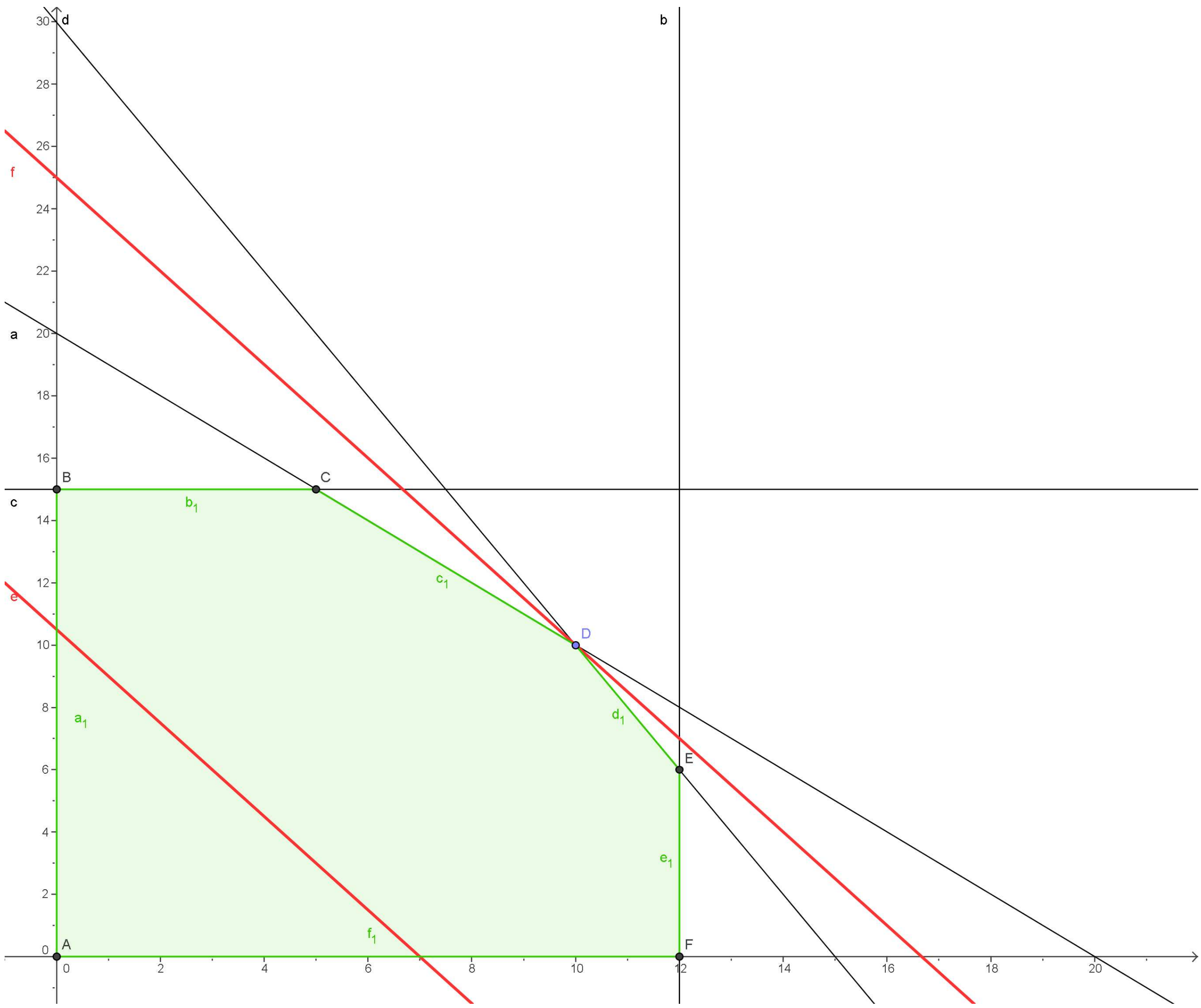
$$x + y \leq 20$$
$$4x + 2y \leq 60$$
$$x \leq 10 \wedge y \leq 15$$

Nichtnegativitätsbedingungen:

$$x \geq 0 \quad und \quad y \geq 0$$

<u>Zielfunktion:</u> $6x + 4y = Z \rightarrow \max.$

b)



c) Lösung: x = 10 y = 10 => G = 100

$$\begin{array}{r|cccc|c} & x & y & u_1 & u_2 & b \\ I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 20 \\ II.) & 4 & 2 & 0 & 1 & 60 \\ \hline G: & 6 & 4 & 0 & 0 & Z \end{array} \quad \xrightarrow{\frac{1}{4}\cdot II.)}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} I.) & 1 & 1 & 1 & 0 & 20 \\ II.) & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 15 \\ \hline G: & 6 & 4 & 0 & 0 & Z \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{I.)-II.)} \\ \\ \xrightarrow{G-6\cdot II.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} I.) & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & 5 \\ II.) & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 15 \\ \hline G: & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & Z-90 \end{array} \quad \xrightarrow{2\cdot I.)}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} I.) & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 10 \\ II.) & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 15 \\ \hline G: & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & Z-90 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \xrightarrow{II.)-\frac{1}{2}\cdot I.)} \\ \xrightarrow{G-I.)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} I.) & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} & 10 \\ II.) & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 10 \\ \hline G: & 0 & 0 & -2 & -1 & Z-100 \end{array}$$

Aufgabe 7:

a) Projekt I: C_0 = 2.027,03 Projekt II: C_0 = 2.166,56

Projekt II ist vorteilhafter.

b) ***Lösung:***

$$2.027,03 = -10.000,00 + 5.037,72 + \frac{x}{1,06^4}$$

$$6.989,31 = \frac{x}{1,06^4}$$

$$x = 6.989,31 \cdot 1,06^4$$

$$x = 8.823,84$$

c) q_{eff} = 1,1435 => i_{eff} = 0,1435

$f(x) = -10x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 4x^1 + 4x^0$ $f\,'(x) = -40x^3 + 9x^2 + 6x^1 + 4x^0$

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f\,'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f\,'(x_n)$
0	1.1	1.382	-31.75	1.143527
1	1.143527	-0.11652	-37.183531	1.140393
2	1.140393	-0.00063	-36.776338	1.140376