Übungen: Mathematik
zur Klausurvorbereitung

Jürgen Meisel
Mathematik

1.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$$p_A(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2 \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -x^2 + 14$$

b) Ermitteln Sie die **Konsumenten- und Produzentenrente** bei x = 3.

2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils erste (partielle) Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $$f(x) = \sqrt{x^3}\,(x-1)^2$$

b) $$f(x,y) = y^2 \cdot e^{\sqrt{2x+3}} + \frac{x^2}{y}$$

c) $$f(x,y) = x^{x+1} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{y}$$

3.) **Determinanten**

Für welche Werte von k ist die Matrix A_k regulär?

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 2 & 0 \\ k & k & k \end{pmatrix}$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion f(x) mit der Vorschrift

$$f_t(x) = \frac{tx^2}{e^x} \qquad mit \quad t \in \Re \setminus \{0\}$$

nach folgenden Kriterien:

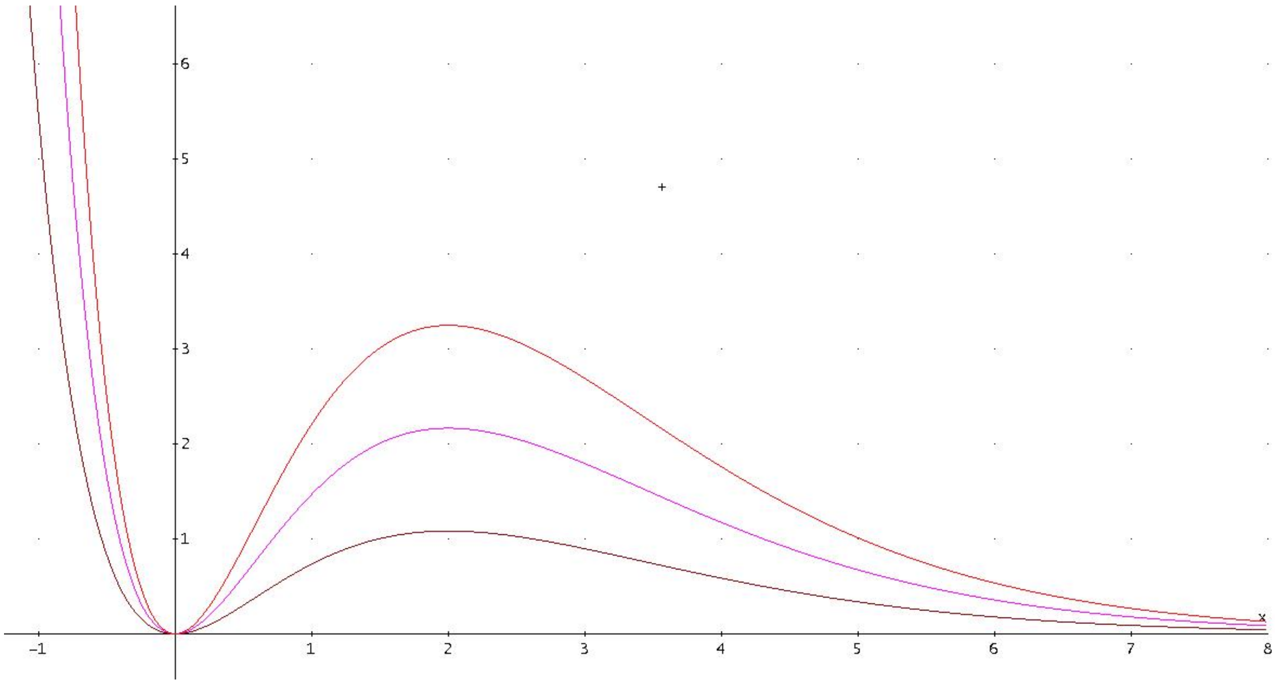
a) Definitionsbereich, Symmetrie **und** Nullstellen

b) Beweisen Sie, dass die 1. Ableitung von $f_t\left(x\right)$ folgende Form annehmen kann:

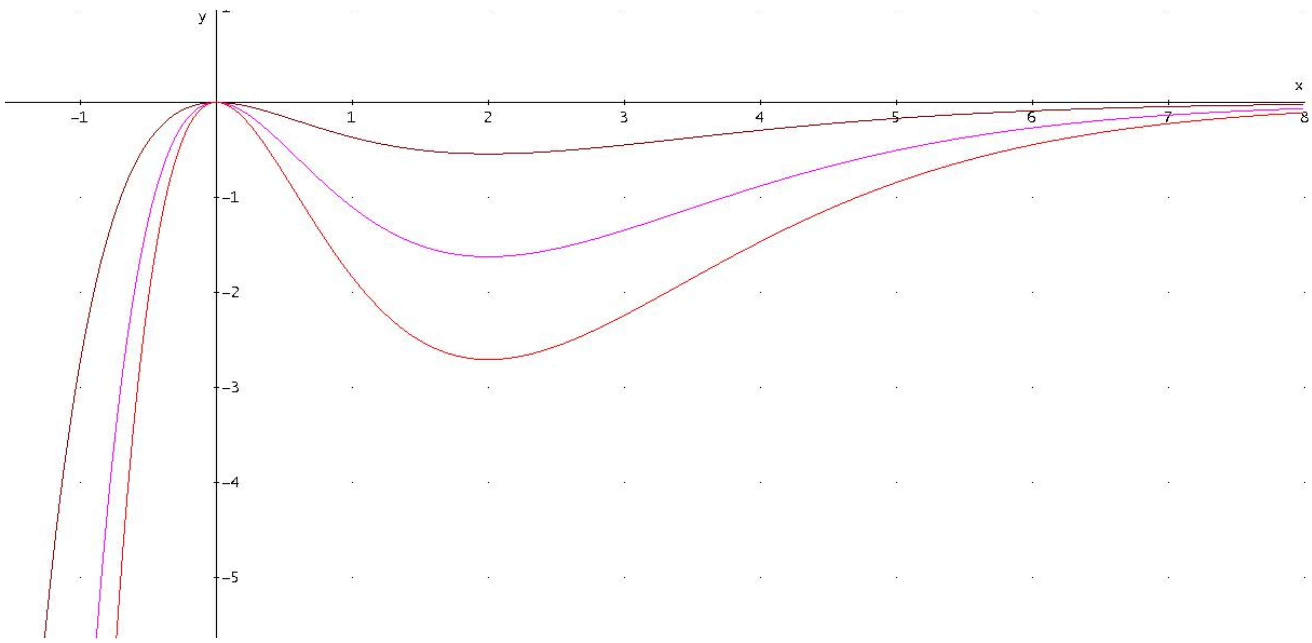
$$f_t{}'(x) \quad = \quad \frac{2tx}{e^x} - f_t\left(x\right)$$

c) Beweisen Sie das Grenzwertverhalten von $f_t\left(x\right)$ für $x \longrightarrow \pm\infty$.

d) Für welche drei Werte von t wurde die Funktion $f_t\left(x\right)$ hier abgebildet?



Für welche drei Werte von t wurde die Funktion $f_t\left(x\right)$ hier abgebildet?



<u>Setzen Sie nun für t = 2 und bearbeiten Sie folgende Fragestellung:</u>

e) Extrema und Wendepunkte von $f_2(x)$

Anmerkung: Für die Wendepunkte genügt die notwendige Bedingung!

5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 3xy + 2y^4 + y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

b) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 6x^{0,2}y^{0,8}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 4 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 3 €. Das Budget beträgt insgesamt 1.000 €.

Wie viel kann im optimalen Fall produziert werden?

6.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 20 E_1 und 10 E_2 im Lager vorrätig sein?

c) Nun hat man einen Lagerbestand an Rohstoffen von R_1 = 1.110 und R_2 = 1.240. Wie viele Endprodukte E_1 und E_2 können hiermit hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte?

7.) **Berechnen mathematischer Ausdrücke**

Bestimmen Sie die Lösung folgender Gleichungen und Ausdrücke:

a) $$\sum_{i=1}^{400}\left(\frac{2}{5}i\right)$$

b) $$\sum_{i=-2}^{48}(i+3) \quad + \quad \sum_{i=1}^{50} i$$

c) $$Det\begin{pmatrix} 3 & 4k \\ -\frac{1}{2}k & -4 \end{pmatrix} \cdot \binom{k}{k-1} = 2k^2$$

Anmerkung: $\binom{k}{k-1}$ ***ist hier kein Vektor, sondern ein Binomialkoeffizient!!!***

d) $$x^6 - 8x^3 - 4 = 2x^3 + 35$$

8.) **Newton-Iteration**

Bestimmen Sie die Wurzel aus 8 mittels der Newton-Iteration auf drei Stellen genau.

9.) **Investitionsrechnung**

Die haben zwei Projekte zur Auswahl und sollen eine Investitionsentscheidung treffen.

Beide Projekte verursachen eine Anfangsausgabe von je 7.000,00 €.

Die Rückflüsse für Projekt I in den folgenden vier Jahren würden bei 1.000 € (Jahr 1), 5.000 € (Jahr 2), 2.000 € (Jahr 3) und 500 € (Jahr 4) liegen.

Projekt II würde in den ersten beiden Jahren keine Rückflüsse erbringen, aber mit 4.000 € (Jahr 3) und 5.000 € (Jahr 4) absolut gesehen einen vermeintlich höheren Ertrag liefern.

a) Beurteilen Sie die Situation auf Basis eines Kalkulationszinssatzes von 5 % mit Hilfe der Kapitalwertmethode und treffen Sie eine Investitionsentscheidung.

b) Wie hoch wäre der interne Zinsfuß/-satz für Projekt I?

(Anmerkung: eine Näherung per Newton-Iteration genügt!)

Lösungen:

Aufgabe 1:

Marktgleichgewicht: M (3 / 5)

Konsumentenrente: $K_R = 18$ Produzentenrente: $P_R = 6$

Aufgabe 2: Ableitungen

a) $$f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}(x-1)^2 + \sqrt{x^3} \cdot 2(x-1)$$

b) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} y^2 \cdot e^{\sqrt{2x+3}} + \frac{2x}{y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y \cdot e^{\sqrt{2x+3}} - \frac{x^2}{y^2}$$

c) $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^{x+1} \cdot \left[\ln(x) + \frac{x+1}{x}\right] \cdot \frac{1}{3}\sqrt{y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^{x+1} \cdot \frac{1}{6\sqrt{y}}$$

Aufgabe 3:

Matrix M ist regulär $\Leftrightarrow$ $k \in \Re \setminus \{0\}$

Aufgabe 4:

a) $D = \Re$; keine Symmetrie; Nullstelle: x = 0

b) $$f_t'(x) = \frac{2tx \cdot e^x - tx^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2tx}{e^x} - \frac{tx^2}{e^x} = \frac{2tx}{e^x} - f_t(x)$$

c) Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to \infty$:

Regel von L'Hospital: $f_t(x) \to 0$

Grenzwertverhalten von $f_t(x)$ für $x \to -\infty$:

$f_t(x) \to \infty$

Nenner strebt gegen 0; Zähler strebt gegen unendlich

d) Graph 1: k = {2, 4, 6} Graph 2: k = {-5, -3, -1}

e) Extrema: Minimum (0 / 0) Maximum (2 / 1,08)

Wendepunkt: W$_1$ ($2-\sqrt{2}$ / 0,38) W$_2$ ($2+\sqrt{2}$ / 0,77)

1. Ableitung: $$f_2'(x) = \frac{4x-2x^2}{e^x}$$

2. Ableitung: $$f_2''(x) = \frac{2x^2-8x+4}{e^x}$$

Aufgabe 5:

a) $$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 - 3xy + 2y^4 + y^2$$

Stationäre Stellen: $S_1(0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} \;\middle|\; \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \quad \wedge \quad S_3\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2} \;\middle|\; -\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$

Hesse-Matrix: $$H\left[f(x,y)\right] = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 24y^2+2 \end{pmatrix}$$

Auswertung:

$$H\left[f(0,0)\right]=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S_1 \textit{ ist Sattelpunkt}$$

$$H\left[f\left(\frac{1}{4}\sqrt{2},\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)\right]=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S_2 \textit{ ist Minimum}$$

$$H\left[f\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2},-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)\right]=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S_3 \textit{ ist Minimum}$$

b) Ansatz: $L(x,y,\lambda)=6x^{0,2}y^{0,8}+\lambda(1000-4x-3y)$

$$\textit{Lagrangeansatz}: \quad L(x,y,\lambda)=6x^{0,2}y^{0,8}+\lambda(1000-4x-3y)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=1,2\frac{y^{0,8}}{x^{0,8}}-4\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\textit{nach } \lambda \textit{ auflösen}} \lambda=0,3\frac{y^{0,8}}{x^{0,8}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=4,8\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}-3\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\textit{nach } \lambda \textit{ auflösen}} \lambda=1,6\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}}$$

$$\xrightarrow{\textit{gleichsetzen}} 0,3\frac{y^{0,8}}{x^{0,8}}=1,6\frac{x^{0,2}}{y^{0,2}} \xrightarrow{\textit{nach y auflösen}} y=\frac{16}{3}x$$

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB}} x=50 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{16}{3}\cdot 50=\frac{800}{3}$$

$$\Rightarrow \quad q\left(50 \;\middle|\; \frac{800}{3}\right)=1.144,78$$

Aufgabe 6:

a) $M_{RE} = \begin{pmatrix} 42 & 23 \\ 40 & 28 \end{pmatrix}$ b) (1.070 , 1.080) c) (10 , 30)

Aufgabe 7:

a) 32.080 b) 2.601

c) $k_1 = 0 \quad \wedge \quad k_2 = 3 \quad \wedge \quad k_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad L = \{3\}$

d) $u_1 = 13 \quad \wedge \quad u_2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \sqrt[3]{13} \quad \wedge \quad x_2 = \sqrt[3]{-3}$

Aufgabe 8:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	2	-4	4	3
1	3	1	6	2.8333
2	2.8333	0.027777	5.66666	2.82843

Aufgabe 9:

a) Projekt I: C_0 = 626,54 Projekt II: C_0 = 568,86

Projekt I ist vorteilhafter.

b) i_{eff} = 1,09