Bilden Sie die ersten partiellen Ableitungen

1.) $f(x,y)=(x-3)^2+2xy^2-16$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2(x-3)+2y^2 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4xy$$

2.) $f(x,y)=3x^2y^3+4xy+x^2e^{7y}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6xy^3+4y+2xe^{7y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=9x^2y^2+4x+7x^2e^{7y}$$

3.) $f(x,y)=\left(\sqrt{xy}\right)^3+xy^2\cdot(x-y)$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=3\left(\sqrt{xy}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}+y^2\cdot(x-y)+x^2y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3\left(\sqrt{xy}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}+2xy\cdot(x-y)-xy^2$$

4.) $f(x,y)=3x^2-4y^2+5xy+4y$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=6x+5y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-8y+5x+4$$

5.) $f(x,y)=\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{5}{y^2}\cdot e^{x+y}+\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}\cdot 1 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{10x}{y^3}\cdot e^{x+y}+\frac{5x}{y^2}\cdot e^{x+y}\cdot 1$$

6.) $f(x,y)=\dfrac{x^4-3x^2y}{3x+2y^2}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\left(4x^3-6xy\right)\left(3x+2y^2\right)-3\left(x^4-3x^2y\right)}{\left(3x+2y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{3x^2\left(3x+2y^2\right)-4y\left(x^4-3x^2y\right)}{\left(3x+2y^2\right)^2}$$

7.) $f(x,y)=5x^2y^4+8\dfrac{y^2}{x^5}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=10xy^4-40\frac{y^2}{x^6} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=20x^2y^3+16\frac{y}{x^5}$$

8.) $f(x,y)=x^2\cdot e^{4x+5y}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x\cdot e^{4x+5y}+4x^2\cdot e^{4x+5y} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=5x^2\cdot e^{4x+5y}$$

9.) $f(x,y)=x^2\cdot\ln(x\cdot y)-e^{-2xy}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x\cdot\ln(x\cdot y)+x^2\cdot\frac{y}{x\cdot y}+2ye^{-2xy} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x^2\cdot\frac{x}{x\cdot y}+2xe^{-2xy}$$

10.) $f(x,y)=4x^\alpha y^{(1-\alpha)}$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=4\alpha x^{(\alpha-1)}y^{(1-\alpha)} \quad = \quad 4\alpha\frac{y^{(1-\alpha)}}{x^{(1-\alpha)}} \quad = \quad 4\alpha\left(\frac{y}{x}\right)^{(1-\alpha)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=4(1-\alpha)x^\alpha y^{-\alpha} \quad = \quad 4(1-\alpha)\frac{x^\alpha}{y^\alpha} \quad = \quad 4(1-\alpha)\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha$$

11.) $f(x,y) = \left(x^3 y^2\right)^y$

Umformung der Funktion zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach x:

$$f(x,y) = \left(x^3 y^2\right)^y = x^{3y} y^{2y}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3y\, x^{3y-1} y^{2y} = 3x^{3y-1} y^{2y+1}$$

oder :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\left(x^3 y^2\right)^{y-1} \cdot 3x^2 y^2 = x^{3\cdot(y-1)} y^{2\cdot(y-1)} \cdot 3x^2 y^3 = 3x^{3y-1} y^{2y+1}$$

Umformung der Funktion zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach y:

$$f(x,y) = \left(x^3 y^2\right)^y = e^{\ln\left(x^3 y^2\right)^y} = e^{y\cdot\ln\left(x^3 y^2\right)}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{y\cdot\ln\left(x^3 y^2\right)} \cdot \left[1 \cdot \ln\left(x^3 y^2\right) + y \cdot \frac{1}{x^3 y^2} \cdot 2x^3 y\right] = e^{y\cdot\ln\left(x^3 y^2\right)} \cdot \left[\ln\left(x^3 y^2\right) + 2\right]$$

12.) $f(x,y) = 2y^{3x} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

Umformung zur Ermittlung der partiellen Ableitung nach x:

$$f(x,y) = 2y^{3x} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \cdot e^{\ln y^{3x}} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot 3\ln y \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2 \cdot e^{3x \cdot \ln y} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} \\ &= 2 \cdot \left[y^{3x} \cdot 3\ln y \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + y^{3x} \cdot \frac{1}{x} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2 \cdot 3xy^{3x-1} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) + 2y^{3x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ &= 6xy^{3x-1} \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 2y^{3x-1} \quad = \quad 2y^{3x-1} \cdot \left[3x \cdot \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1 \right]\end{aligned}$$

Anwendung

Gegeben sei die Produktionsfunktion $f(A,K) = 90A^{0,8}K^{0,2}$.

Ermitteln Sie die partielle Grenzproduktivität für die beiden Inputfaktoren
für A = 1000 und K = 200.

$$f(A,K) = 90A^{0,8}K^{0,2}$$

$$\frac{\partial f(A,K)}{\partial A} = 72A^{-0,2}K^{0,2} \quad = \quad 72 \cdot \left(\frac{K}{A}\right)^{0,2} \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} 72 \cdot \left(\frac{1.000}{200}\right)^{0,2} \approx 99,34$$

$$\frac{\partial f(A,K)}{\partial K} = 18A^{0,8}K^{-0,8} \quad = \quad 18 \cdot \left(\frac{A}{K}\right)^{0,8} \xrightarrow{\text{Werte einsetzen}} 18 \cdot \left(\frac{1.000}{200}\right)^{0,8} \approx 65,23$$

Extremwertberechnung ohne Nebenbedingung(en)

Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie die Funktionen auf Extrema

1.) $f(x,y)=\frac{1}{2}x^2+2xy+y^2+4x+2y+3$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x+2y+4 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-4-2y$$

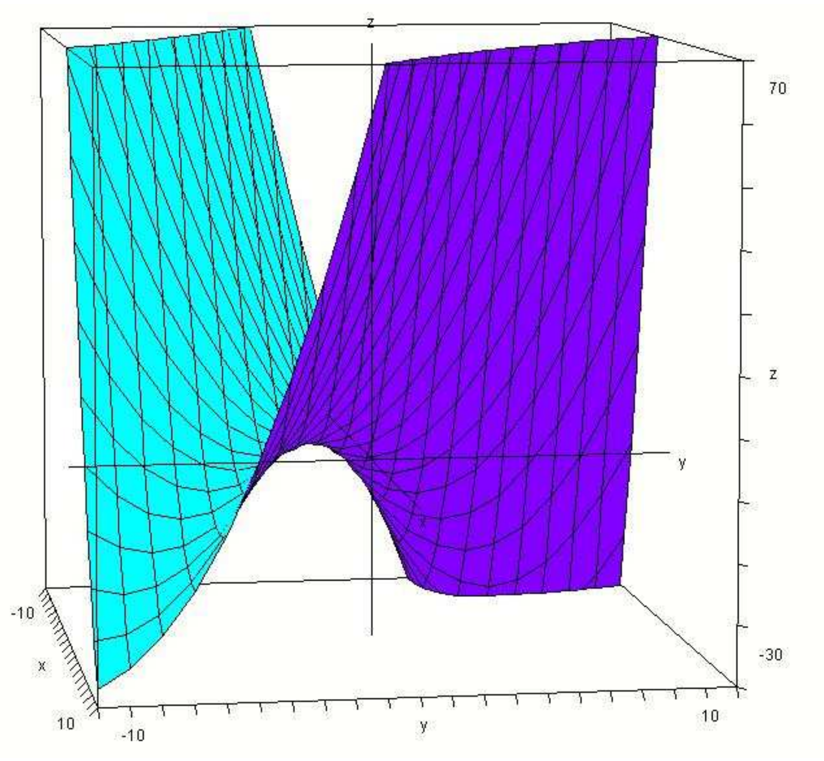
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x+2y+2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x=-1-y$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} y=-3 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x=2$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx}=1>0 \\ Det(H(f))=-2<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremwert, sondern Sattelpunkt



2.) $f(x,y) = x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + 2x + 4y - 7$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + 2y + 2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x = -1 - y$$

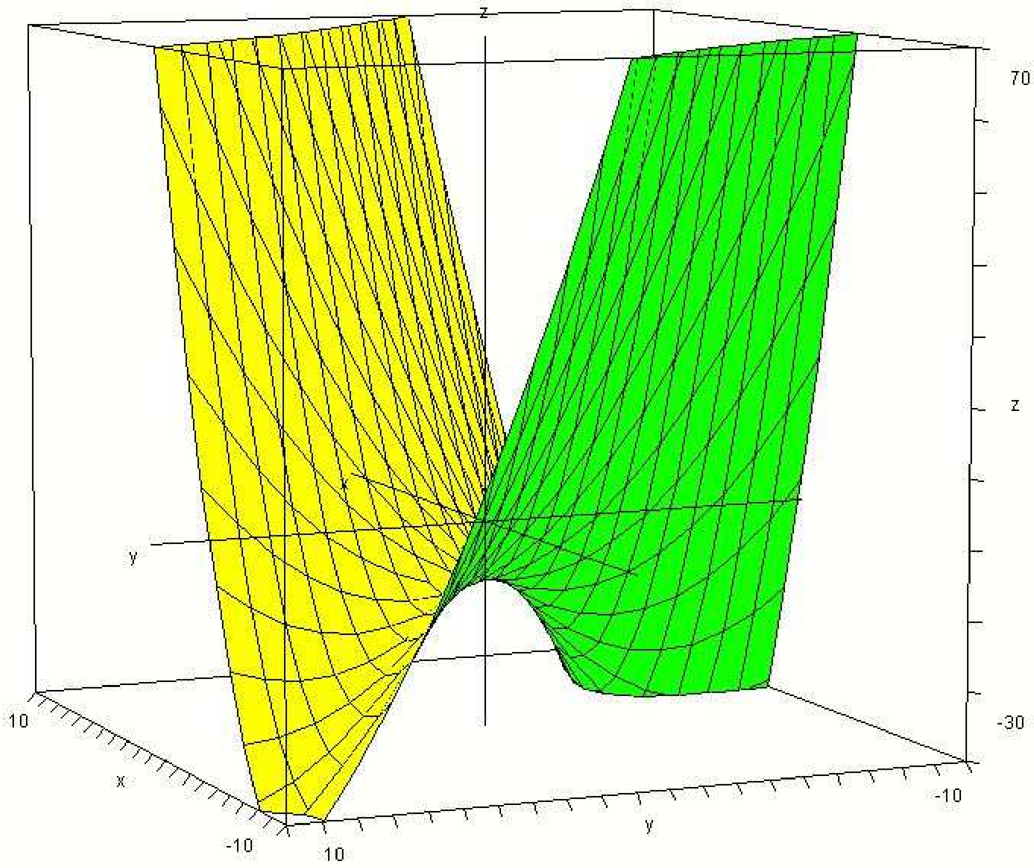
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x + y + 4 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x = -2 - \frac{1}{2}y$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} y = 2 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x = -3$$

Hesse – Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = 2 > 0 \\ Det(H(f)) = -2 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ kein Extremwert, sondern Sattelpunkt



3.) $f(x,y) = y^3 - 3x^2 y$

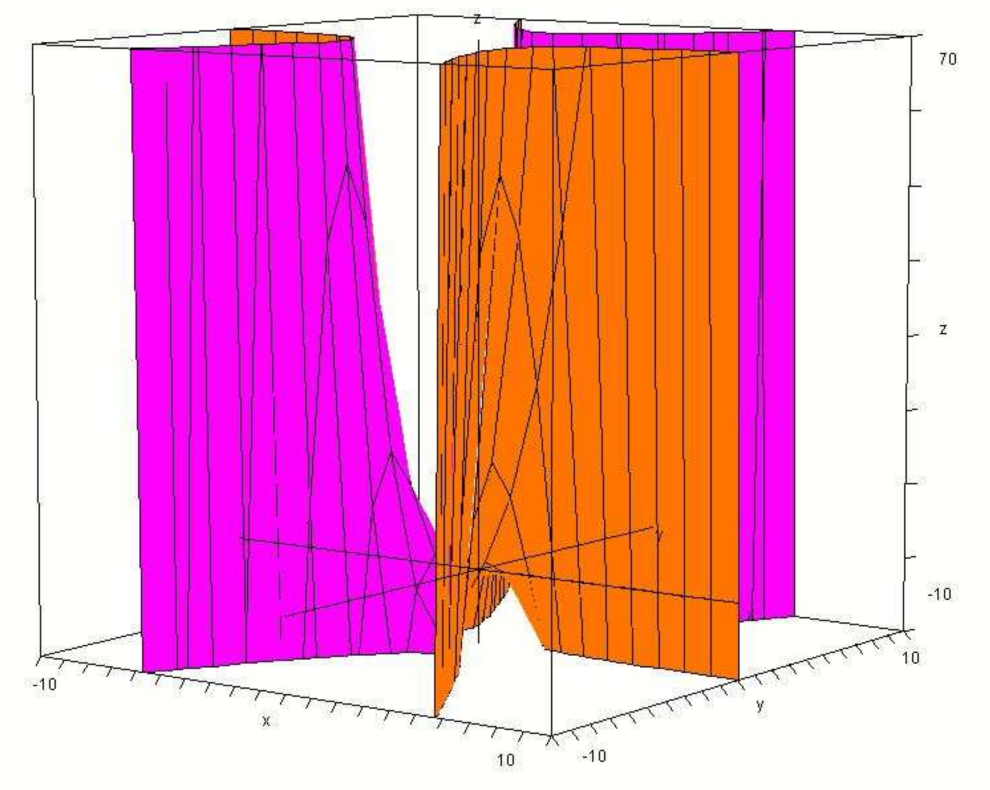
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -6xy \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x;y \text{ auflösen}} x = y = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} x^2 = y^2$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -6y & -6x \\ -6x & 6y \end{pmatrix} \xrightarrow{x=0 \text{ und } y=0 \text{ einsetzen}} H(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{xx} = 0 \\ Det(H(f)) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{semidefinit} \Rightarrow \text{keine Aussage möglich}$$



4.) $f(x,y) = 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9x + 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x + 3y - 9 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x + 6y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } x \text{ auflösen}} x = -2y$$

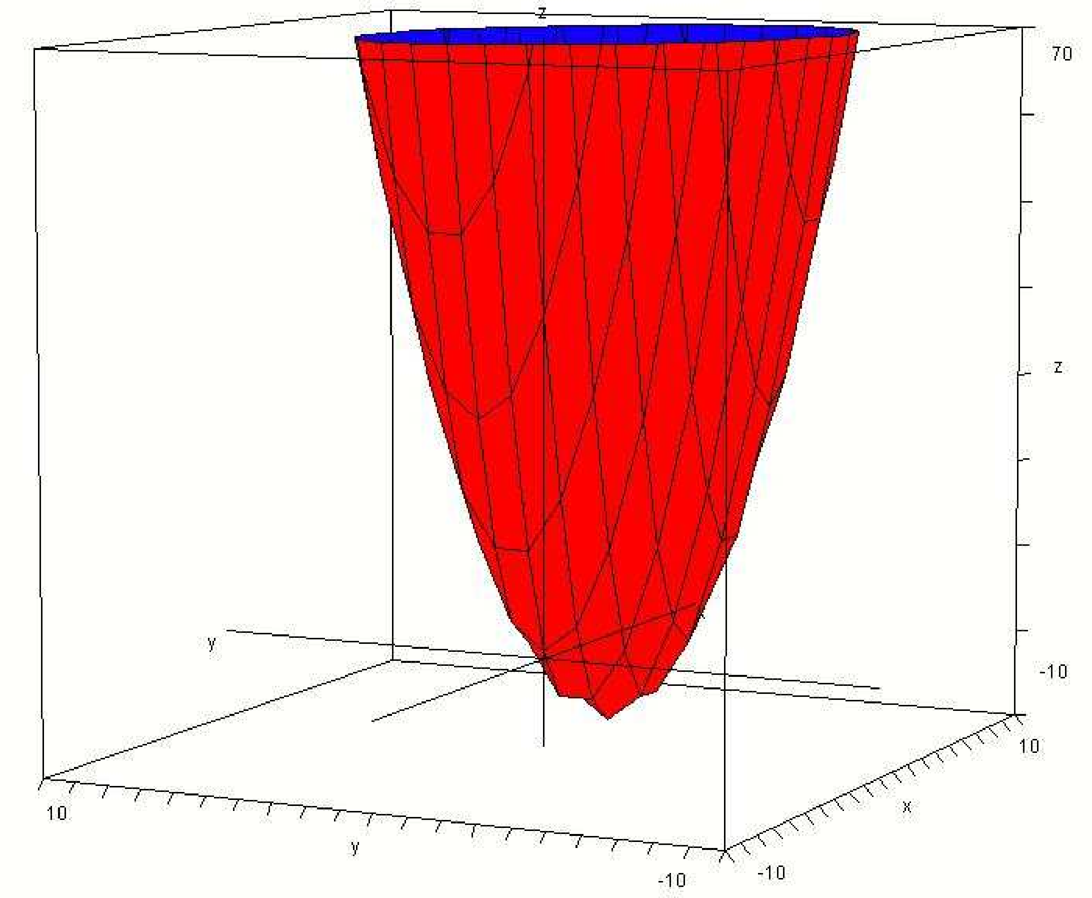
$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} y = -1 \xrightarrow{\text{einsetzen}} x = 2$$

$Hesse-Matrix:$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = 6 > 0 \\ Det(H(f)) = 27 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ Minimum

$\Rightarrow$ $\text{Min}(2 \mid -1 \mid -8)$



5.) $f(x,y) = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - 36x$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 9x^2 - 36 \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach x auflösen}} x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - 6y \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach y auflösen}} y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = 2$$

Hesse – Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 18x & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

Auswertung von 4 stationären Stellen:

$P_1(2 \mid 0) \quad P_2(2 \mid 2) \quad P_3(-2 \mid 0) \quad P_4(-2 \mid 2)$

$$H_{P_1}(f(2 \mid 0)) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = 36 > 0 \\ Det(H(f)) = -216 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt

$$H_{P_2}(f(2 \mid 2)) = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = 36 > 0 \\ Det(H(f)) = 216 > 0 \end{cases}$$

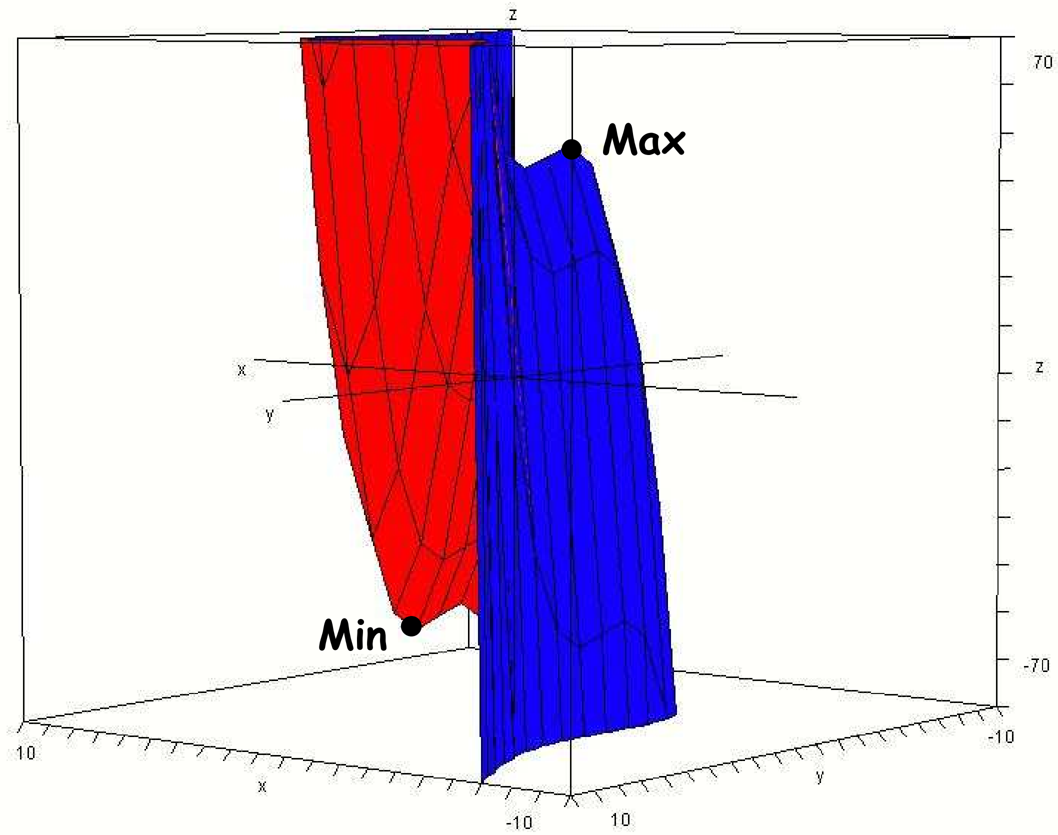
$\Rightarrow$ positiv definit $\Rightarrow$ Minimum $\Rightarrow$ Min$(2 \mid 2 \mid -52)$

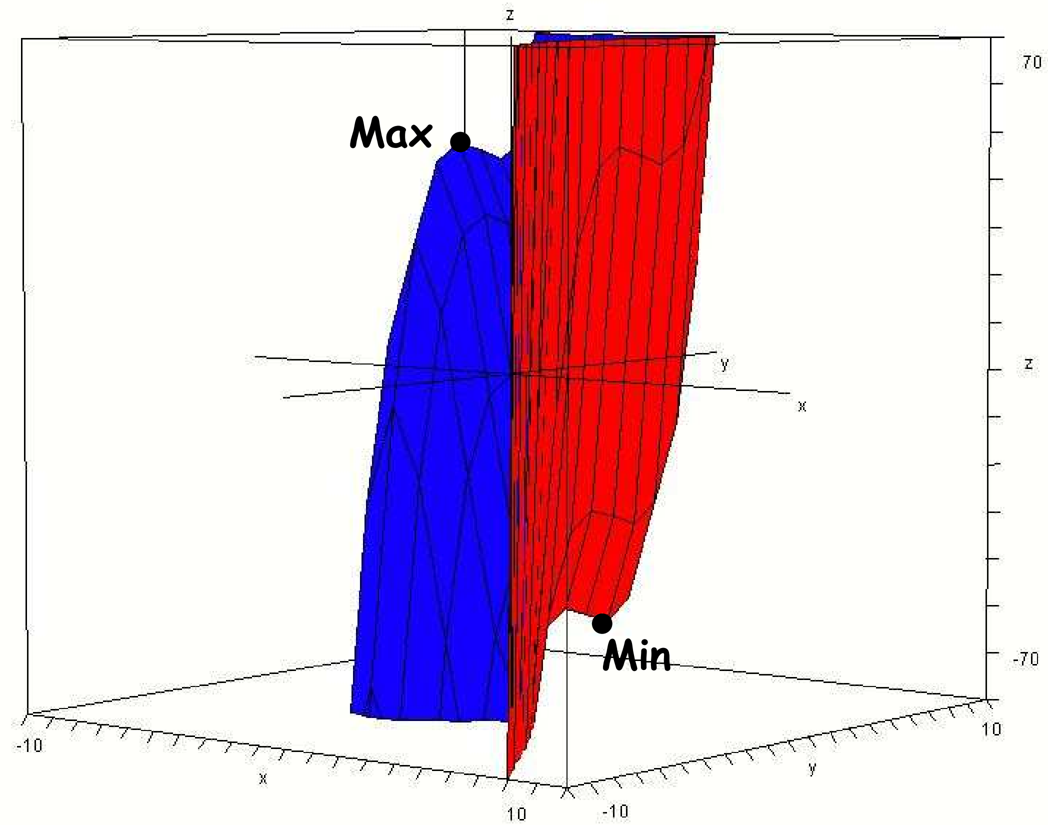
$$H_{P_3}(f(-2 \mid 0)) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = -36 < 0 \\ Det(H(f)) = 216 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ negativ definit $\Rightarrow$ Maximum $\Rightarrow$ Max$(-2 \mid 0 \mid 48)$

$$H_{P_4}(f(-2 \mid 2)) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Auswertung}} \begin{cases} f_{xx} = -36 < 0 \\ Det(H(f)) = -216 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ indefinit $\Rightarrow$ Sattelpunkt


z
70
Max
x
y
z
Min
-70
10
x
-10
10
y
-10


z
70
Max
y
z
x
Min
-70
-10
x
10
-10
y
10

Extremwertberechnung mit Nebenbedingung(en)

1.) $f(x,y) = x^2 - 2xy \qquad NB: y = 2x - 6$

$$Lagrangeansatz: \quad L(x,y,\lambda) = x^2 - 2xy + \lambda(6 - 2x + y)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2x - 2y - 2\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = x - y$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = -2x + \lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = 2x$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} x - y = 2x \xrightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} y = -x$$

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB}} x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = -2$$

2.) $f(x,y) = 10x^{0,4}y^{0,6} \qquad NB: 8x + 3y = 100$

$$Lagrangeansatz: \quad L(x,y,\lambda) = 10x^{0,4}y^{0,6} + \lambda(100 - 8x - 3y)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 4\frac{y^{0,6}}{x^{0,6}} - 8\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = \frac{y^{0,6}}{2x^{0,6}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 6\frac{x^{0,4}}{y^{0,4}} - 3\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = \frac{2x^{0,4}}{y^{0,4}}$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} \frac{y^{0,6}}{2x^{0,6}} = \frac{2x^{0,4}}{y^{0,4}} \xrightarrow{\text{nach } y \text{ auflösen}} y = 4x$$

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB}} x = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 20$$

3.) Gegeben ist die Produktionsfunktion $f(x,y)=10x^{0,7}y^{0,3}$ sowie die konstanten Faktorkosten k_1 = 12 GE und k_2 = 18 GE.

a) Erstellen Sie die Kostenfunktion.

b) Ermitteln Sie die Minimalkostenkombination bei einem Output von 200.

c) Ermitteln Sie den maximalen Output für die Gesamtkosten von 400.

$$a)\quad Kostenfunktion:\quad K(x,y)=12x+18y$$

$$b)$$

$$Lagrangeansatz:\quad L(x,y,\lambda)=12x+18y+\lambda\left(200-10x^{0,7}y^{0,3}\right)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x}=12-7\lambda\frac{y^{0,3}}{x^{0,3}}\overset{!}{=}0\xrightarrow{\text{nach }\lambda\text{ auflösen}}\lambda=\frac{12x^{0,3}}{7y^{0,3}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y}=18-3\lambda\frac{x^{0,7}}{y^{0,7}}\overset{!}{=}0\xrightarrow{\text{nach }\lambda\text{ auflösen}}\lambda=\frac{6y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}}\frac{12x^{0,3}}{7y^{0,3}}=\frac{6y^{0,7}}{x^{0,7}}\xrightarrow{\text{nach }y\text{ auflösen}}y=\frac{2}{7}x$$

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB}}x\approx 29{,}12\quad\Rightarrow\quad y\approx 8{,}32\quad\Rightarrow\quad K_{Min}\approx 499{,}28$$

$$c)$$

Austauschverhältnis $y=\frac{2}{7}x$ bleibt bestehen, weil nur Zielfunktion und NB vertauscht werden $\Rightarrow$ Neue NB: 400=12x+18y

$$\xrightarrow{\text{y einsetzen in NB:}}x=23\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad y=6\frac{2}{3}\quad\Rightarrow\quad f_{Max}\approx 160{,}24$$

4.) Student Rudi Pfiffig hat genau 12 € bei sich. Da er hungrig und durstig ist er bestrebt sein persönliches Wohlbefinden, welches funktional in folgender Weise definiert werden kann $f(B,E) = 2B^{0,5}E^{0,5}$ optimal zu befriedigen.
Er kann eine beliebige Kombination zwischen B(ier) und E(rdnüssen) wählen.
Die Erdnüsse kosten 1 € (pro Tüte) und das Glas Bier kostet 1,50 €.

Wie viele Tüten Erdnüsse und wie viele Gläser Bier kann Pfiffig bei seinem Budget konsumieren, um sein Wohlbefinden maximal zu gestalten?

$$Lagrangeansatz: \quad L(B,E,\lambda) = 2\sqrt{B}\cdot\sqrt{E} + \lambda(12 - E - 1,5B)$$

$$\frac{\partial L(B,E,\lambda)}{\partial B} = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{B}} - 1,5\lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = \frac{2\sqrt{E}}{3\sqrt{B}}$$

$$\frac{\partial L(B,E,\lambda)}{\partial E} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{E}} - \lambda \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\text{nach } \lambda \text{ auflösen}} \lambda = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{E}}$$

$$\xrightarrow{\text{gleichsetzen}} \frac{2\sqrt{E}}{3\sqrt{B}} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{E}} \xrightarrow{\text{nach E auflösen}} E = \frac{3}{2}B$$

$$\xrightarrow{\text{E einsetzen in NB}} B = 4 \Rightarrow E = 6 \Rightarrow f(4;6) = 2\cdot\sqrt{4\cdot 6} = 4\sqrt{6}$$

5.) Gegeben ist die Produktionsfunktion: $f(E,A) = 500E + 800A + EA - E^2 - 2A^2$
Der Energiepreis beträgt 100 GE/MWh und der Preis für Arbeit beträgt 50 GE/h.

a) Bei welcher Inputkombination wird der höchste Output erzielt?

b) Bei welcher Inputkombination wird der höchste Output erzielt, wenn die Produktionskosten genau 27.500,00 € betragen sollen?

Lösung zu a)

$$\frac{\partial f(E,A)}{\partial E} = 500 + A - 2E \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\textit{nach A auflösen}} A = 2E - 500$$

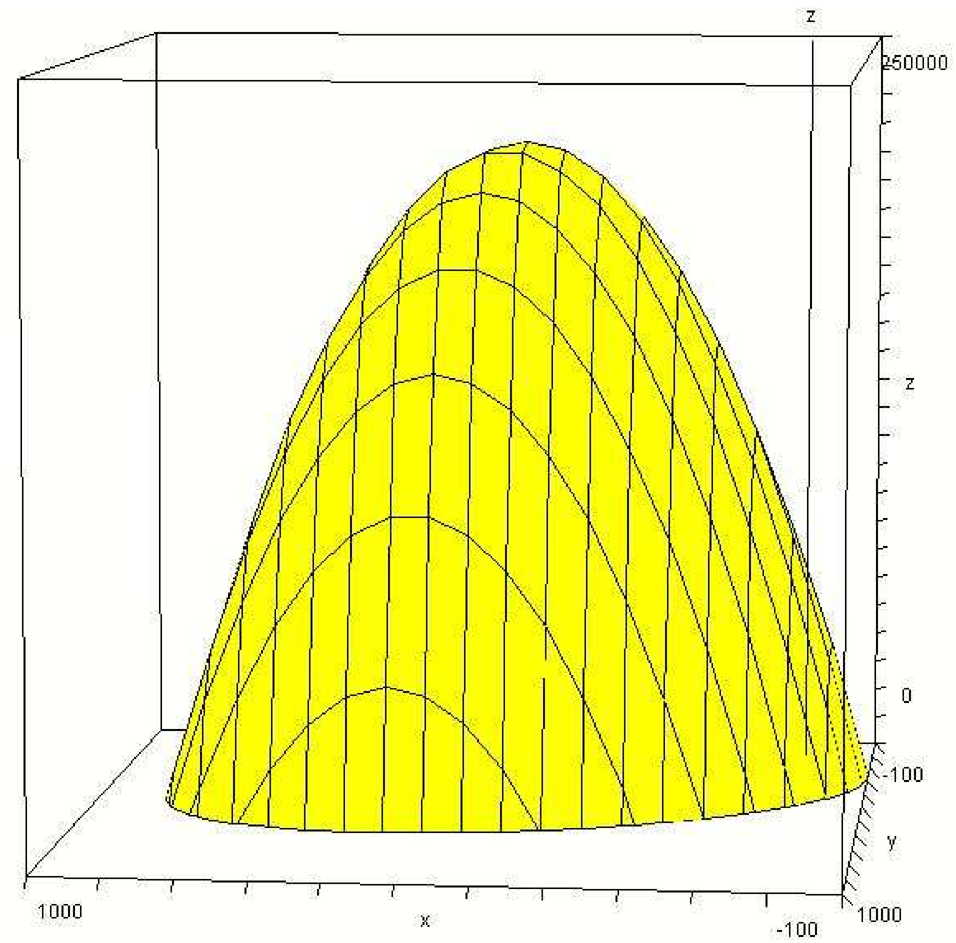
$$\frac{\partial f(E,A)}{\partial A} = 800 + E - 4A \overset{!}{=} 0 \xrightarrow{\textit{nach A auflösen}} A = \frac{1}{4}E + 200$$

$$\xrightarrow{\textit{gleichsetzen}} E = 400 \xrightarrow{\textit{einsetzen}} A = 300$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Auswertung}} \begin{cases} f_{EE} = -2 < 0 \\ Det(H(f)) = 7 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum} \Rightarrow \text{Max}(400 \mid 300 \mid 220.000)$$



Lösung zu b)

$$Lagrangeansatz:$$

$$L(E,A,\lambda) = 500E + 800A + EA - E^2 - 2A^2 + \lambda(27.500 - 100E - 50A)$$

$$\frac{\partial L(E,A,\lambda)}{\partial E} = 500 + A - 2E - 100\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{nach\,100\,\lambda\ auflösen} \quad 100\lambda = 500 + A - 2E$$

$$\frac{\partial L(E,A,\lambda)}{\partial A} = 800 + E - 4A - 50\lambda \overset{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{nach\,100\,\lambda\ auflösen} \quad 100\lambda = 1.600 + 2E - 8A$$

$$\xrightarrow{gleichsetzen} \quad 500 + A - 2E = 1.600 + 2E - 8A$$

$$\xrightarrow{nach\ E\ auflösen} \quad E = \frac{9}{4}A - 275$$

$$\xrightarrow{\text{E einsetzen in NB}} \quad A = 200 \quad \Rightarrow \quad E = 175 \quad \Rightarrow \quad f(175;200) = 171.875$$