Übungsblatt 2a: Differentialrechnung

Mathematik
Jürgen Meisel

Lösungen

1.) Bestimmen Sie die 1. Ableitung zu folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 1$

Lösung: $f'(x) = 12x^2 - 2x$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x}$

Lösung: $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

Lösung: $f'(x) = 2x \cdot e^{4x} + x^2 \cdot 4e^{4x} = x \cdot e^{4x}(2 + 4x)$

d) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2 + x}$

Lösung:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\left(x^2 + x\right) - \ln(x) \cdot (2x + 1)}{\left(x^2 + x\right)^2} = \frac{x + 1 - \ln(x) \cdot (2x + 1)}{\left(x^2 + x\right)^2}$$

2.) Untersuchen Sie die Funktion $f_k(x) = x^3 - kx^2 \quad mit \quad k > 0$

a) Symmetrie
b) Schnittstellen mit den Achsen
c) Extrema
d) Ortskurve der Extrema
e) Wendepunkte
f) Wendetangente
g) Grenzwerte an den Rändern des Definitionsbereichs

h) Skizze für k = 3

i) Schnittpunkte mit der Funktion $f_k(x) \quad = \quad x$

<u>Lösung:</u>

a) Symmetrie: keine, wegen Hochzahlen

b)
$$Nullstellen: \quad f_k(x) = x^2(x-k) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0\,(doppelt) \quad \wedge \quad x_2 = k$$
$$S_y: \quad f_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid 0)$$

c) Extremwerte:

$$f_k'(x) = 3x^2 - 2kx \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{Ausklammern} \quad x(3x-2k) \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{2}{3}k$$
$$f_k''(x) = 6x - 2k$$
$$f_k''(0) = -2k < 0 \quad \Rightarrow \quad Max(0 \mid 0)$$
$$f_k''\left(\frac{2}{3}k\right) = 6 \cdot \frac{2}{3}k - 2k = 2k > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{2}{3}k \;\middle|\; -\frac{4}{27}k^3\right)$$

d) Ortskurve der Extrema:

$$Min\left(\frac{2}{3}k \;\middle|\; -\frac{4}{27}k^3\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{2}x$$
$$\Rightarrow \quad y = -\frac{4}{27}k^3 = -\frac{4}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}x\right)^3 = -\frac{1}{2}x^3$$

e) Wendepunkt(e):

$$f_k''(x) = 6x - 2k \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}k$$
$$f_k'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f_k'''\left(\frac{1}{3}k\right) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; -\frac{2}{27}k^3\right)$$

f) Wendetangente:

Steigung im Wendepunkt:

$$f_k'\left(\frac{1}{3}k\right) = 3\cdot\left(\frac{1}{3}k\right)^2 - 2k\cdot\frac{1}{3}k = \frac{1}{3}k^2 - \frac{2}{3}k^2 = -\frac{1}{3}k^2 = m$$

$$W\left(\frac{1}{3}k \;\middle|\; -\frac{2}{27}k^3\right)$$

Ermittlung der Geradengleichung:

$$-\frac{2}{27}k^3 = -\frac{1}{3}k^2\cdot\frac{1}{3}k + b \Rightarrow -\frac{2}{27}k^3 = -\frac{1}{9}k^3 + b \Rightarrow b = \frac{1}{27}k^3$$

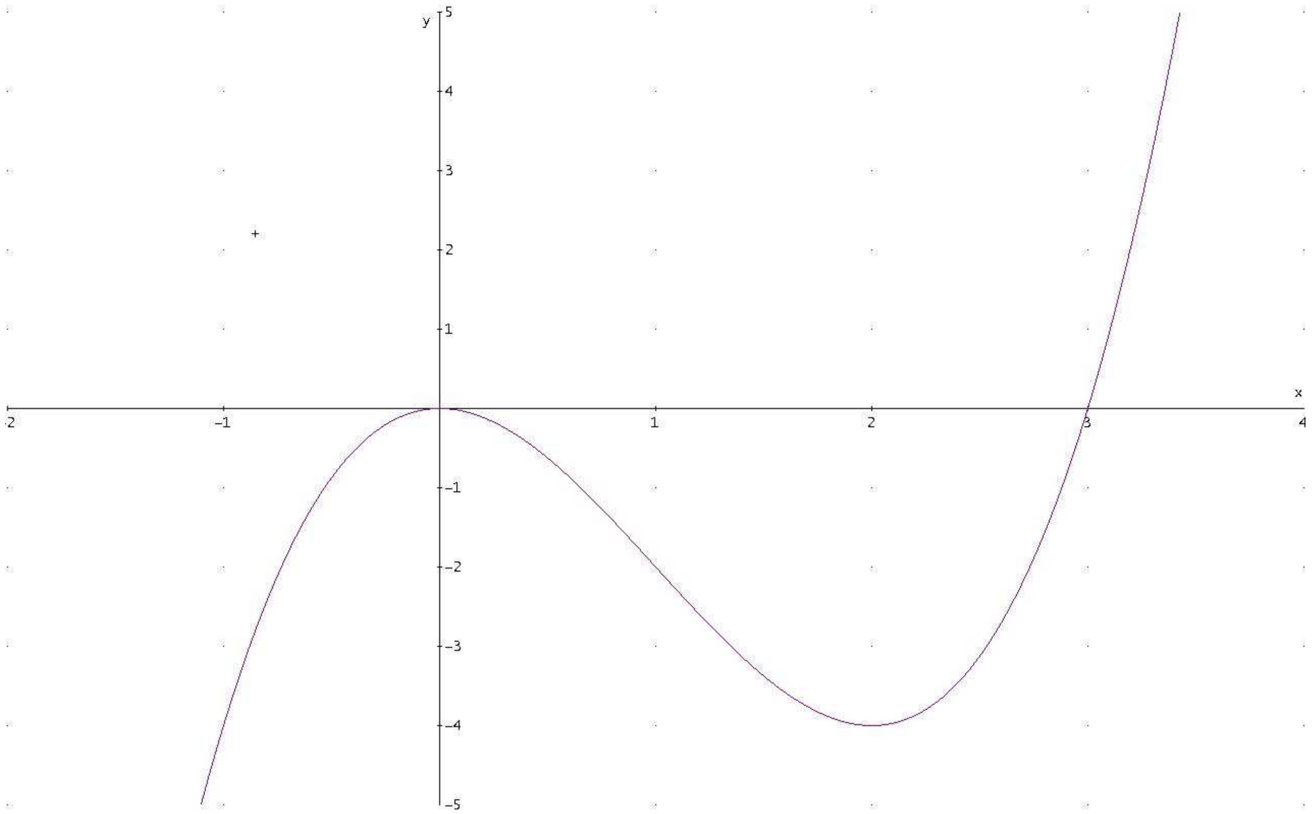
Wendetangente:

$$t(x) = -\frac{1}{3}k^2 x + \frac{1}{27}k^3$$

g) Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\infty}\left(x^3 - tx^2\right) \to \infty \qquad und \qquad \lim_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - tx^2\right) \to -\infty$$

h) Graph der Funktion für t = 3



i) Schnittpunkte mit der Funktion $f_k(x) = x$

$$f_k(x) = x \Rightarrow x^3 - kx^2 = x \Rightarrow x^3 - kx^2 - x = 0$$

$$x\left(x^2 - kx - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \wedge \quad x^2 - kx - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$$

$$S_1(0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \,\middle|\, \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right) \quad \wedge \quad S_3\left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \,\middle|\, \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)$$