Übungsblatt (VL 2): **Anwendungen Differentiation**

Totale Differentiation

1.) Gegeben sei die Produktionsfunktion $f\left(A,K\right) = 2\cdot A^{0,2}\cdot K^{0,8}$.
Die Faktorinputkombination beträgt A = 20 und K = 10.

Ermitteln Sie das totale Differential dy, wenn A auf 19,7 Einheiten sinkt und K um 0,1 Einheiten erhöht wird.

2.) Bei der Produktion eines Gutes hängt der Output f(x,y,z) vom Einsatz der Produktionsfaktoren $\left(x \quad y \quad z\right)$ gemäß folgender Produktionsfunktion ab:

$$f\left(x,y,z\right) = 0,5\sqrt{xy}+0,1x^{0,4}z^{0,6}+0,2y^{0,3}z^{0,7}$$

Für die vorgegebene Inputkombination $\left(x \quad y \quad z\right)=\left(4 \quad 5 \quad 9\right)$ ermittle man das vollständige Differential, wenn x um 0,2 Einheiten erhöht und gleichzeitig y und z um jeweils 0,1 Einheiten vermindert werden.

Grenzrate der Substitution

3.) Gegeben sei die Nutzenfunktion $u\left(x,y\right) = 2\cdot x^{0,8}\cdot y^{0,6}$.

Ermitteln Sie die Grenzrate der Substitution für das mit den verfügbaren Konsummengen x = 24 und y = 32 erreichbare Nutzenniveau.

4.) Gegeben sei die Nutzenfunktion $u\left(a,b,c,d\right) = 2\cdot\sqrt{ab}+8\sqrt{bc}+\sqrt{d}$.

Das erzielbare Nutzenniveau u_0 ergibt sich aus den verfügbaren Konsummengen a = 20, b = 20, c = 5 und d = 25.

Um wie viele Einheiten muss c.p. der Konsum des zweiten Gutes gesteigert werden, wenn von c 0,5 Einheiten substituiert werden sollen und das Nutzenniveau erhalten bleiben soll.

5.) Zeigen Sie, dass die Indifferenzlinien einer Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

$$u\left(x,y\right) = c\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}$$

monoton fallend und konvex sind.

Extremwerte ohne Nebenbedingungen

6.) Ermitteln Sie die stationären Stellen und prüfen Sie, ob es sich um Extremwerte handelt:

$$u(a,b,c,d) = a^4 - 4a^3 + bcd - 2cd - 2b - 4c - 8d + 1.$$

7.) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 50 \cdot x^{0,4} \cdot y^{0,5}$.

Die Gesamtmenge q kann zu einem Stückpreis von p = 2,00 € abgesetzt werden. Die Kosten für die Einsatzfaktoren seien k_1 und k_2.

a) Wie lautet die Gewinnfunktion?

Fall 1: Die Faktoreinsatzmengen betragen x = 1.024 und y = 400.

b) Wie hoch sind dann die Stückkosten, der Erlös und der maximale Gesamtgewinn?

Fall 2: Die Stückkosten der Einsatzfaktoren betragen $k_1 = 50$ und $k_2 = 20$.

c) Wie hoch sind nun die Einsatzmengen, der Erlös und der maximale Gesamtgewinn?

8.) Eine 2-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 10 GE und p_2 = 5 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

9.) Eine 3-Produkt-Unternehmung produziere nach der Gesamtkostenfunktion

$$K(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + yz + 100$$

Die Marktpreise der Güter seien exogen vorgegeben mit p_1 = 40 GE, p_2 = 50 GE und p_3 = 80 GE *(=> Polypol).*

a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.

10.) Von einer 2-Produkt-Unternehmung, die als monopolistischer Anbieter am

Markt agiert, sind folgende Größen bekannt:

a) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 0{,}5x^2 + xy + y^2 + 500.000$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 1.280 - 4x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 2.360 + 2x - 3y$

b) Stückvariable Kosten: $k_1 = 2\ {}^{GE}/_{ME}$ und $k_2 = 5\ {}^{GE}/_{ME}$

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1,p_2) = 600 - 50p_1 + 30p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1,p_2) = 800 + 10p_1 - 40p_2$

c) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 16 - 2x$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 12 - y$

d) Stückvariable Kosten: $K(x,y) = x^2 - y^2$

Nachfrage nach Gut 1: $x(p_1,p_2) = 8 - 2p_1 + p_2$

Nachfrage nach Gut 2: $y(p_1,p_2) = 10 + p_1 - 3p_2$

e) Gesamtkostenfunktion $K(x,y) = 50x + 10y$

Preis für Gut 1: $p_1(x,y) = 400 - 2x + y$

Preis für Gut 2: $p_2(x,y) = 150 + 0{,}5x - 0{,}5y$

(i) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

(ii) Bestimmen Sie die gewinnmaximalen Produktionsmengen bzw. die gewinnmaximalen Preise, den maximalen Gesamtgewinn und zeigen Sie dass Ihr Ergebnis ein Maximum darstellt.