Übungsblatt: Matrizen, Determinanten und LGS

Mathematik
Jürgen Meisel

1.) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) $A + 2C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2 \\ 2t-2 & 5 & t+2 \end{pmatrix}$

b) $3 \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} 6t-9 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $A \cdot C^T = \begin{pmatrix} 5 & t+8 \\ 2-t & 2-t \end{pmatrix}$

d) $D \cdot A^T = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 5 & 2 \\ t+8 & 4t-4 \end{pmatrix}$

e) $D^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

f) Det(D) = 9

g) Es gibt unterschiedliche Ergebnisse:

$$\left(A \cdot C^T + D\right)^2 = \begin{pmatrix} -t^2 - 8t + 58 & -t^2 + t + 78 \\ t^2 - 11t + 12 & 39 - 12t \end{pmatrix}$$

$$\left(A \cdot C^T\right)^2 + 2 \cdot A \cdot C^T + D^2 = \begin{pmatrix} -t^2 - 6t + 54 & -t^2 + t + 78 \\ t^2 - 11t + 12 & 39 - 12t \end{pmatrix}$$

h) Es gibt identische Ergebnisse:

$$\left(D + E\right)^2 = D^2 + 2 \cdot D \cdot E + E^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}$$

Warum ist bei g) die Aussage falsch, bei h) allerdings richtig?

Antwort: Da die Multiplikation mit der Einheitsmatrix E kommutativ ist.

2.) Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 22$

b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 22$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

d) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix} = -0,02$

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - b$

f) $\begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix} = -2ab$

g) $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0$

h) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix} = a^4 + b^4$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -92$

j) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

m) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

n) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -8x + 14y + 4z$

o) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = vgl.\ Formelsammlung$

p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 0 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

3.) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie **A + B, A + C, -3B, -A + C^T, 2A - 3B**

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad -3B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -9 \\ -12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$A + C =$ wegen Formatungleichheit nicht lösbar

$$-A + C^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad 2A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 \\ -8 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

b) Gibt es reelle Zahlen r und s, für die gilt: **rA + sB = C^T** ?

Antwort: Nein, es gibt keine Zahlen, da es einen Widerspruch bei den Elementen $a_{1,2} = 0$ und $b_{1,2} = 3$ gibt.

c) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung **A + 3(X – A + B) = 5B + X**

Antwort: **X = A + B**

d) Bestimmen Sie die Produkte

AC, CA, BC, (A + B)C, BCA, AB, A^{T}B, B^{T}A, A^{T}A, AD, D^{T}D und DD^T .

$$A\cdot C=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 21 & 18\end{pmatrix} \qquad C\cdot A=\begin{pmatrix}8 & -1 & 7\\ 7 & 1 & -2\\ 18 & -3 & 19\end{pmatrix} \qquad B\cdot C=\begin{pmatrix}16 & 11\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A+B)\cdot C=\begin{pmatrix}26 & 17\\ 25 & 19\end{pmatrix} \qquad B\cdot C\cdot A=\begin{pmatrix}70 & -11 & 71\\ 14 & -1 & 9\end{pmatrix} \qquad A^T\cdot B=\begin{pmatrix}14 & 0 & 7\\ -4 & 0 & 1\\ 22 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

$A\cdot B=$ wegen Formatfehler nicht berechenbar

$$B^T\cdot A=\begin{pmatrix}14 & -4 & 22\\ 0 & 0 & 0\\ 13 & -5 & 26\end{pmatrix} \qquad A^T\cdot A=\begin{pmatrix}13 & -2 & 13\\ -2 & 1 & -5\\ 13 & -5 & 26\end{pmatrix} \qquad A\cdot D=\begin{pmatrix}-1\\ 8\end{pmatrix}$$

$$D^T\cdot D=5 \qquad D\cdot D^T=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

4.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte **AB, BA, AO, AE und EB** für

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B\cdot A=\begin{pmatrix} 12 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad A\cdot O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot E = A \qquad E\cdot B = B$$

5.) Berechnen Sie möglichst günstig (mit möglichst wenigen Additionen und Multiplikationen) das dreifache Matrizenprodukt ABC für

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Antwort: $A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

6.) Welche Matrix X ist mit der Matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauschbar, so dass AX = XA gilt ?

Antwort: $X=\begin{pmatrix} a & k \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad mit\ a,k\in\Re$

7.) Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 1 \\ a & 0,5 \end{pmatrix}$

Für welche reellen Zahlen a gilt

a) $A + A^T = E$, b) $A - A^T = O$, c) $AA = A$, d) $aA + E \leq O$,

wenn E die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix von passenden Format sind.

Antwort:

a) $A + A^T = E$ nicht lösbar, b) $A - A^T = O$ für a = 1,

c) $AA = A$ für $a = \frac{1}{4}$, d) $aA + E \leq O$ nicht lösbar wegen a^2

8.) LGS (3 x 3)

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 2 & -3 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -22 \\ -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

f) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}$$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \{ \quad \}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} mit\ z \in \Re$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-2z \\ -1+z \\ z \end{pmatrix} mit\ z \in \Re$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -6 & 8 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2z \\ 1+1,4z \\ z \end{pmatrix} mit\ z \in \Re$

9.) LGS (2 x 2)

a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{k}{k+8} \\ \dfrac{2k+12}{k+8} \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \setminus \{-8\}$

d) $\begin{pmatrix} 2k & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2k+12}{4k+3} \\ \dfrac{9k}{4k+3} \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \setminus \left\{-\dfrac{3}{4}\right\}$

Zusatzfrage zu c) und d): Für welche Werte von k sind die LGS nicht lösbar?

10.) LGS mit Parameter

a) Für welche Werte von t hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 1 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösungen? (ii) eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Antwort:

$$Det\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} = 2t^2-8 = 0 \rightarrow t = \pm 2$$

$$\rightarrow \quad eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t \in \Re \setminus \{\pm 2\}$$

$$\rightarrow \quad keine\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm 2$$

b) Für welche Werte von a hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(i) eine Lösung? (ii) keine Lösung?

Antwort:

$$Det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 34a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$\rightarrow \quad eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad a \in \Re \setminus \{0\}$$

$$\rightarrow \quad keine\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

c) Gegeben seien die Matrix A_t und der Vektor $\vec{b}_t$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_t = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \Re$$

(i) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen LGS $A_3 \cdot \vec{x} = \vec{b}_3$.

(ii) Worin unterscheiden sich homogene und inhomogene LGS?
Nennen Sie zwei Unterschiede!

(iii) Für welche Werte $t \in \Re$ hat das LGS $A_t \cdot \vec{x} = \vec{b}_t$ keine Lösung?

(iv) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige **homogene** LGS
$A_1 \cdot \vec{x} = ??$ an. Wählen Sie dabei y als freie Variable.

Antwort:

$$Det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} = (t-1)\cdot t\cdot(t+1) = 0 \rightarrow t = \pm 1 \wedge t = 0$$

$$\rightarrow \textit{eindeutige Lösung} \Leftrightarrow t \in \Re \setminus \{\pm 1; 0\}$$

$$\rightarrow \textit{keine Lösung} \Leftrightarrow t \in \{\pm 1; 0\}$$

$$A_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

d) Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \qquad \text{und} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Lösung für

die Gleichung $C_2 \cdot \vec{x} = \vec{d}$ darstellt.

(ii) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS $C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$
I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

(iii) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}$

(iv) Der Vektor $\vec{w}^T$ ist definiert durch: $\vec{w}^T = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot C_k \cdot C_{-1}$

Ermitteln Sie den Vektor $\vec{w}^T$.

Antwort:

$$Det = \begin{vmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 8k - 12 = 0 \rightarrow k = -2 \wedge k = 3$$

$$\rightarrow \quad eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad k \in \Re \setminus \{-2;3\}$$

$$\rightarrow \quad keine\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t = (-2)$$

$$\rightarrow \quad \infty - viele\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t = 3$$

$$C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{17} + \frac{8}{17}z \\ \frac{8}{17} - \frac{10}{17}z \\ z \end{pmatrix} \quad mit\ z \in \Re$$

$$\vec{w} = (3k-6 \quad k+2 \quad 2k-4)$$

e) Gegeben sind die Matrix A_k und der Vektor $\vec{b}_k$ durch

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

(i) Ermitteln Sie die Determinante von A_k.

(ii) Für welche Werte von k hat das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$

I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

(iii) Bestimmen Sie die Lösung für $A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$.

Antwort:

$$Det = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} = k^2 + 6k = 0 \rightarrow k = -6 \wedge k = 0$$

$$\rightarrow \quad eindeutige\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad k \in \Re \setminus \{-6;0\}$$

$$\rightarrow \quad keine\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t = (-6)$$

$$\rightarrow \quad \infty - viele\ Lösung \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

$$A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \quad mit\ y \in \Re$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3k-6 & k+2 & 2k-4 \end{pmatrix}$$

11.) Ökonomische Anwendungen I

Gegeben sind folgende Matrizen einer Produktionsserie:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M_{RE}.

Antwort: $$M_{RE} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 24 & 21 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$$

b) Wir erhalten einen Auftrag an Endprodukten von e = (20 , 10)
Wie viele Rohstoffe und wie viele Zwischenprodukte
benötigen wir zur Erfüllung des Auftrages?

Antwort: $$\begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 24 & 21 \\ 34 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 \\ 690 \\ 970 \end{pmatrix} \quad und \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 150 \end{pmatrix}$$

c) Wir haben einen Rohstoffvorrat von (620 , 660 , 920)
Wie viele Endprodukte können wir herstellen, wenn danach das
Lager vollkommen leer ist?

Antwort: $$\begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 24 & 21 \\ 34 & 29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 620 \\ 660 \\ 920 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

12.) Ökonomische Anwendungen II

Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien M_1, M_2 und M_3 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten E_1, E_2 und E_3.
Die folgenden Matrizen stellen die Stücklisten / Materialverflechtungen dar.

$$M_{MZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

Antwort:

$$M_{ME} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 18 \\ 14 & 14 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang (10 25 20).
Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt (200 100 85).
Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 25 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 175 \\ 100 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Der Vorrat reicht aus.

c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun (130 70 60).
Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett leeren würden.

Antwort:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 70 \\ 60 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 25 \end{pmatrix}$$

d) Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis 3 : 2 : 1 gefertigt und dabei 1.350 ME von M3 verarbeitet.
Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt?

Antwort:

$$M_{ME} \cdot \begin{pmatrix} 3x \\ 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82x \\ 90x \\ 54x \end{pmatrix} \rightarrow 54x = 1.350 \rightarrow x = 25$$

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 75 & 50 & 20 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2.050 & 2.250 & 1.350 \end{pmatrix}$$