Mathematik
Jürgen Meisel

Übungsblatt: Matrizen, Determinanten und LGS

1.) Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ t & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) A + 2 C   b) 3A * B   c) A * C^T

d) $(D * A)^T$ e) D^{-1} f) Det(D)

g) $(A * C^T + D)^2 = (A\,C^T)^2 + 2A\,C^T E + D^2$

h) $(D + E)^2 = D^2 + 2DE + E^2$

Warum ist bei g) die Aussage falsch, bei h) allerdings richtig?

2.) Determinanten

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,3 & 0,2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a & ab \\ 1 & -b \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ x & 1 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & 2a^2b^2 \\ -1 & (a-b)^2 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ k) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

m) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ o) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 34 \\ 0 & 3 & 54 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

3.) Gegeben sind die Matrizen

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie **A + B, A + C, -3B, -A + C^T, 2A – 3B**

b) Gibt es reelle Zahlen r und s, für die gilt: **rA + sB = C^T** ?

c) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung **A + 3(X – A + B) = 5B + X**

d) Bestimmen Sie die Produkte

AC, CA, BC, (A + B)C, BCA, AB, A^{T}B, B^{T}A, A^{T}A, AD, D^{T}D und DD^T .

4.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte **AB, BA, AO, AE und EB** für

$$A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix} \qquad O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5.) Berechnen Sie möglichst günstig (mit möglichst wenigen Additionen und Multiplikationen) das dreifache Matrizenprodukt ABC für

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

6.) Welche Matrix X ist mit der Matrix $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

vertauschbar, so dass AX = XA gilt ?

7.) Gegeben sei die Matrix $A=\begin{pmatrix}0{,}5 & 1\\ a & 0{,}5\end{pmatrix}$

Für welche reellen Zahlen a gilt

a) $A + A^T = E$, b) $A - A^T = O$, c) $AA = A$, d) $aA + E \le O$,

wenn E die Einheitsmatrix und O die Nullmatrix von passenden Format sind.

8.) LGS (3 x 3)

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 2 & -3 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ -22 \\ -8 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -6 & 8 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

9.) LGS (2 x 2)

a) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 25 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2k \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2k & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k \\ 4 \end{pmatrix}$

Zusatzfrage zu c) und d): Für welche Werte von k sind die LGS nicht lösbar?

10.) LGS mit Parameter

a) Für welche Werte von **t** hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & t \\ 2t & 1 & 8 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ 1 \\ 2-t \end{pmatrix}$$

(i) keine Lösungen? (ii) eine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

b) Für welche Werte von a hat das LGS

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2a \\ 4 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(i) eine Lösung? (ii) keine Lösung?

c) Gegeben seien die Matrix A_t und der Vektor $\vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{t}}$

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ \mathrm{t} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathrm{t} \in \Re$$

(i) Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen LGS $\mathrm{A}_3 \cdot \vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}_3$.

(ii) Worin unterscheiden sich homogene und inhomogene LGS?
Nennen Sie zwei Unterschiede!

(iii) Für welche Werte $\mathrm{t} \in \Re$ hat das LGS $\mathrm{A}_{\mathrm{t}} \cdot \vec{\mathrm{x}} = \vec{\mathrm{b}}_{\mathrm{t}}$ keine Lösung?

(iv) Geben Sie eine Lösung für das zugehörige **homogene** LGS

$\mathrm{A}_1 \cdot \vec{\mathrm{x}} = ??$ an.

Wählen Sie dabei y als freie Variable.

d) Gegeben sind die Matrix C_k und der Vektor $\vec{d}$

$$C_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ -3 & 1 & k-1 \\ k & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad mit\ k \in \Re \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ eine Lösung für

die Gleichung $C_2 \cdot \vec{x} = \vec{d}$ darstellt.

(ii) Für welche Werte von k hat das inhomogene LGS $C_k \cdot \vec{x} = \vec{d}$

I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

(iii) Geben Sie eine Lösung für das LGS $C_3 \cdot \vec{x} = \vec{d}$

(iv) Der Vektor $\vec{w}^T$ ist definiert durch: $\vec{w}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C_k \cdot C_{-1}$

Ermitteln Sie den Vektor $\vec{w}^T$.

e) Gegeben sind die Matrix A_k und der Vektor $\vec{b}_k$ durch

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 2k & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -k & 3k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$$

(i) Ermitteln Sie die Determinante von A_k.

(ii) Für welche Werte von k hat das LGS $A_k \cdot \vec{x} = \vec{b}_k$

I) keine Lösung? II) genau eine Lösung? III) ∞ - viele Lösungen?

(iii) Bestimmen Sie die Lösung für $A_0 \cdot \vec{x} = \vec{b}_0$.

11.) Ökonomische Anwendungen I

Gegeben sind folgende Matrizen einer Produktionsserie:

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Matrix M_{RE} .

b) Wir erhalten einen Auftrag an Endprodukten von e = (20 , 10)
Wie viele Rohstoffe und wie viele Zwischenprodukte
benötigen wir zur Erfüllung des Auftrages?

c) Wir haben einen Rohstoffvorrat von (620 , 660 , 920)
Wie viele Endprodukte können wir herstellen, wenn danach das
Lager vollkommen leer ist?

12.) Ökonomische Anwendungen II

Die Unternehmung Armes Brot AG verarbeitet die Materialien M_1, M_2 und M_3 zu den Zwischenprodukten Z_1, Z_2 und Z_3 und diese Zwischenprodukte zu den Endprodukten E_1, E_2 und E_3 .
Die folgenden Matrizen stellen die Stücklisten / Materialverflechtungen dar.

$$M_{MZ} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Wie viele Materialien werden pro Endprodukt gebraucht?

b) Die Firma erhält einen Auftrag vom Umfang (10 25 20).
Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt (200 100 85).
Prüfen Sie, ob der vorhandene Bestand genügt bzw. ob nachbestellt werden muss.

c) Der Vorrat an **Zwischenprodukten** beträgt nun (130 70 60).
Unser Chef Rudi Nutzlos will nun wissen, wie viele Endprodukte wir
herstellen können, wenn wir unser Zwischenproduktlager komplett
leeren würden.

d) Die Unternehmung hatte Endprodukte im Mengenverhältnis 3 : 2 : 1
gefertigt und dabei 1.350 ME von M3 verarbeitet.
Wie viele ME der anderen beiden Materialien wurden benötigt?