Übungsaufgaben zur Klausur Statistik

1.) Mittelwerte und Streumaße I

Bei einer Geschwindigkeitskontrolle innerhalb einer geschlossenen Ortschaft notierte die Polizei folgende 20 Messwerte in km/h:

45; 60; 58; 53; 55; 65; 70; 56; 63; 50; 75; 52; 48; 58; 64; 40; 68; 71; 79; 57

a) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung.

b) Berechnen Sie nun den Median, die beiden Quartile und skizzieren Sie den zugehörigen Boxplot.

c) Bilden Sie das zugehörige Histogramm mit folgenden Klassen:
[40;50[[50;55]]55;65[[65;80]

d) Wie viel % der kontrollierten Fahrzeuge erwartet eine Verwarnung, wenn die Polizei mit einer Toleranz von 10 % der Höchstgeschwindigkeit rechnet?

1 a) $\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot 1187 = 59{,}35$

$\sigma^2 = \frac{1}{20} \cdot 72.401 - 59{,}35^2$

$\sigma^2 = 3.620{,}05 - 59{,}35^2$

$\sigma^2 = 97{,}6275$

$\sigma = 9{,}88$

b)

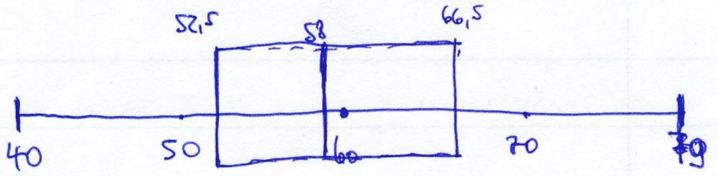
4	0 5 8
5	0 2 3 5 6 7 8 8
6	0 3 4 5 8
7	0 1 5 9

$\bar{x}_M = \frac{1}{2}(x_{10} + x_{11}) \rightsquigarrow \bar{x}_M = 58$

Quartile: $n \cdot p \rightsquigarrow$ ganzzahlig $\quad n \cdot p = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5$

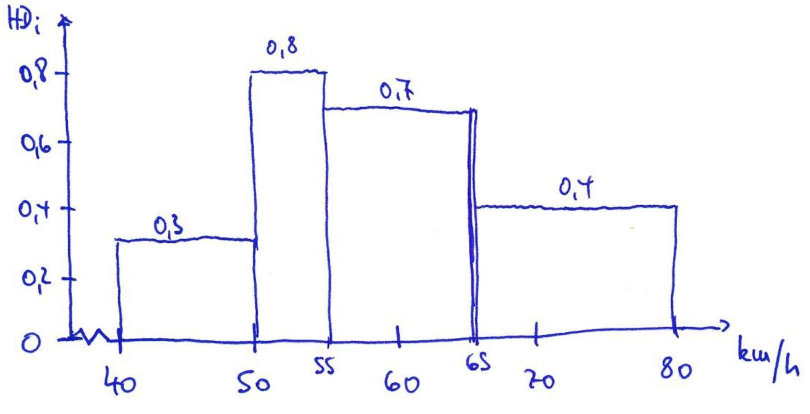
$Q_1 = \frac{1}{2}(x_5 + x_6) \rightsquigarrow Q_1 = \frac{1}{2}(52+53) = 52{,}5$

$Q_3 = \frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \rightsquigarrow Q_3 = \frac{1}{2}(65+68) = 66{,}5$



c)

Klassen	[40 ; 50 [	[50 ; 55]	] 55 ; 65 [	[65 ; 80]
H_i	3	4	7	6
HD_i	0,3	0,8	0,7	0,4
Δ Klasse	10	5	10	15



d) Verwarnung: $v > 55 \rightsquigarrow$ Anzahl: 13 $\rightsquigarrow \frac{13}{20} = 0{,}65 = 65\%$

2.) Mittelwerte und Streumaße II

Bei einer Stichprobe vom Umfang n = 10 wurden das arithmetische Mittel $\mu = 8$ und die Standardabweichung mit $\sigma = 4$ berechnet.
Leider wurden die Werte $x_{11} = 1$ und $x_{12} = 3$ bei der Berechnung vergessen.
Wie lauten nun Mittelwert und Standardabweichung für die gesamt Stichprobe mit n = 12 ?

Anmerkung: Verwenden Sie u.a. die Formel $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - \mu^2$

(2)

$\mu = 8 \qquad n = 10$

$\sigma = 4$

neuer MW :

$\mu_{neu} = \frac{1}{12}(80 + 1 + 3)$

$\mu_{neu} = \frac{84}{12} = 7$

$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \mu^2$

neue Varianz :

$\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \mu^2 = \sigma^2$

$\frac{1}{10}\sum x_i^2 - 64 = 16$

$\sum x_i^2 = 800$

$\sigma^2_{neu} = \frac{1}{12}(800 + 1 + 9) - 49$

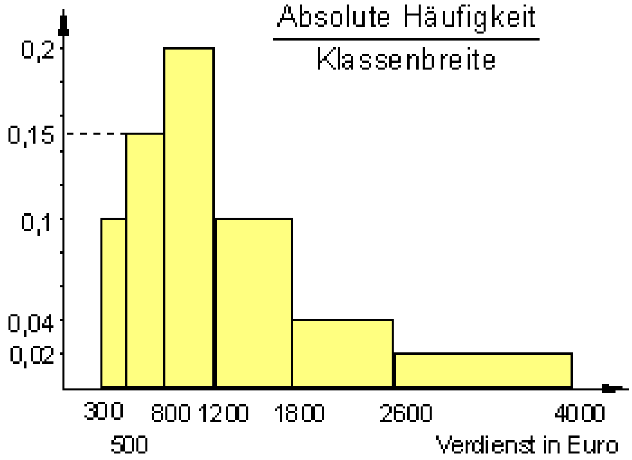
$\sigma^2_{neu} = \frac{810}{12} - 49$

$\sigma^2_{neu} = 18{,}5$

$\sigma_{neu} = 4{,}3016$

3.) Auswertung Histogramm

Das Histogramm beschreibt die Verteilung der Beschäftigten eines Industriezweigs nach ihrem Monatsverdienst.



a) Erstellen Sie die zugehörige Häufigkeitstabelle.

b) Wie groß ist der Durchschnittsverdienst eines Beschäftigten.

c) Bilden Sie hieraus die Lorenzkurve.

③

a)

Klassen	[300; 500[	[500; 800[	[800; 1200[	[1200; 1800[	[1800; 2600[	[2600; 4000]
Klassenbreite	200	300	400	600	800	1400
HD_i	0,1	0,15	0,2	0,1	0,04	0,02
H_i	20	45	80	60	32	28
Klassenmitte	400	650	1.000	1500	2.200	3.300

b)

$$\overline{x} = \frac{1}{265}\left(20 \cdot 400 + 45 \cdot 650 + 80 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 + 32 \cdot 2200 + 28 \cdot 3300\right)$$

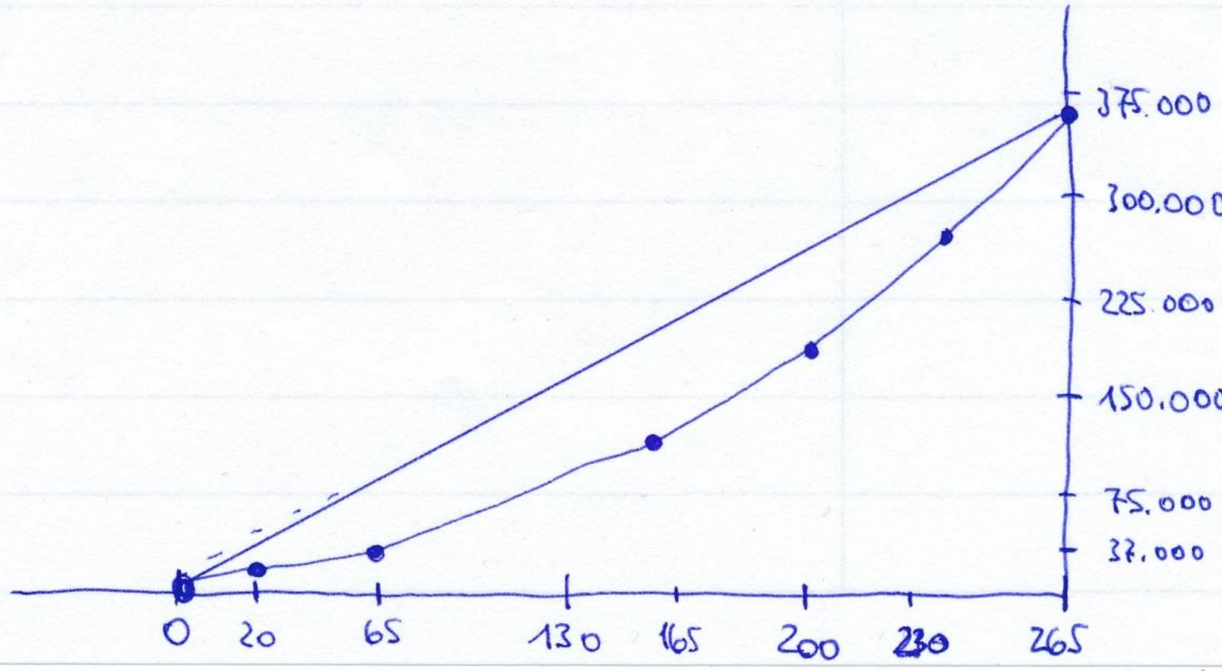
$$\overline{x} = \frac{1}{265} \cdot 370.050$$

$$\overline{x} \approx 1.396{,}42$$

c) Lorenzkurve

Grundlage: kum. Gesamtwerte

Klasse(n)	1	1+2	1+2+3	1 - 4	1 - 5	1 - 6
Mitarbeiter	20	65	145	205	237	265
Verdienst	8.000	37.250	117.250	207.250	277.650	370.050


375.000
300.000
225.000
150.000
75.000
37.000
0
20
65
130
165
200
230
265

4.) Preisindizes

a) Der Preisindex für die Lebenshaltung lag vor genau 4 Jahren bei einem Wert von 204. Jetzt beträgt er 262.
Wie groß ist die jährliche Inflationsrate?

b) In einem Haushalt wurden im Januar 2014 und im Januar 2010 jeweils 4 Güter zu folgenden Mengen verbraucht:

Jahr / Var.	Januar 2010		Januar 2014	
	Preis	Menge	Preis	Menge
Gut A	2,0	50	1,0	84
Gut B	0,5	10	0,5	15
Gut C	0,2	20	0,3	25
Gut D	30	0,7	35	2,0

(i) Bestimmen Sie den Preisindex nach Laspeyres zur Basis 2010.

(ii) Berechnen Sie die Lebenshaltungskosten für Januar 2014

(iii) Wie hoch ist die prozentuale Änderung der Ausgaben für die Lebenshaltung von Januar 2010 bis Januar 2014 auf der Basis von Laspeyres bzw. auf der Basis von Paasche?

④ a) $q^4 = \frac{262}{204} = 1{,}2843 \xrightarrow{\sqrt[4]{\ }} 1{,}06455 \rightarrow p = 6{,}455\,\%$

b) (i) $L_p = \frac{1{,}0 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 20 + 35 \cdot 0{,}7}{2{,}0 \cdot 50 + 0{,}5 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 20 + 30 \cdot 0{,}7} = \frac{85{,}5}{130{,}0} = 0{,}6577$

(ii) Lebenshaltungskosten

$LK = 1 \cdot 84 + 0{,}5 \cdot 15 + 0{,}3 \cdot 25 + 35 \cdot 2$

$LK = 169$

(iii) prozentuale Änderung auf Basis Laspeyres : $\boxed{-34{,}23\,\%}$

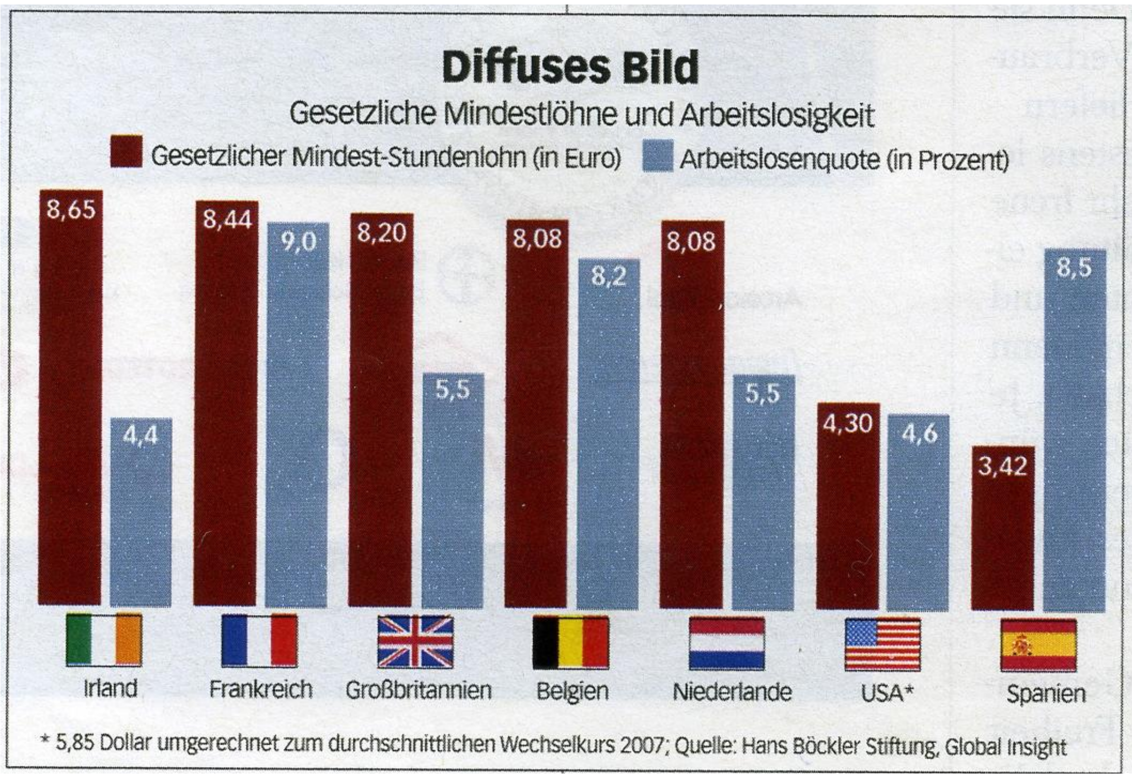
... auf Basis Paasche :

$P_p = \frac{169}{2{,}0 \cdot 84 + 0{,}5 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 25 + 30 \cdot 2} = \frac{169}{240{,}5} = 0{,}7027$

$\Rightarrow \boxed{-29{,}73\,\%}$

5.) Lineare Regression und Korrelationskoeffizient

a) Ermitteln Sie die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizient:



Lösung:

	x	y	x*x	y*y	x*y
	8,65	4,40	74,8225	19,36	38,06
	8,44	9,00	71,2336	81	75,96
	8,20	5,50	67,24	30,25	45,1
	8,08	8,20	65,2864	67,24	66,256
	8,08	5,50	65,2864	30,25	44,44
	4,30	4,60	18,49	21,16	19,78
	3,42	8,50	11,6964	72,25	29,07
Summe:	49,17	45,70	299,2328	302,15	280,606

Mittelwert:	7,0243	6,53

Kor.-Koeffizient:	-0,09097

Regression (Achse):	7,1028
Regression (Steigung):	-0,08175

Regressionsgerade: $y = -0,0817x + 7,1028$

b) Ermitteln Sie die Regressionsgerade und den Korrelationskoeffizient bezüglich des Zusammenhangs zwischen Dauer der Schwangerschaft und Lebenserwartung:

	X = Dauer der Schwangerschaft	Y = Lebens-erwartung
Lemur	18	18
Makak	24	26
Gibbon	30	30
Schimpanse	34	40
Mensch	38	70
Summe	144	184

Lösung:

	x	y	x*x	y*y	x*y
	18	18	324	324	324
	24	26	576	676	624
	30	30	900	900	900
	34	40	1156	1600	1360
	38	70	1444	4900	2660
Summe:	144	184	4400	8400	5868

Mittelwert:	28,8	36,8

Kor.-Koeffizient:	0,88641516

Regression (Achse):	-28
Regression (Steigung):	2,25

Regressionsgerade: $y = 2,25x - 28$

6.) Lorenzkurve und Gini-Koeffizient

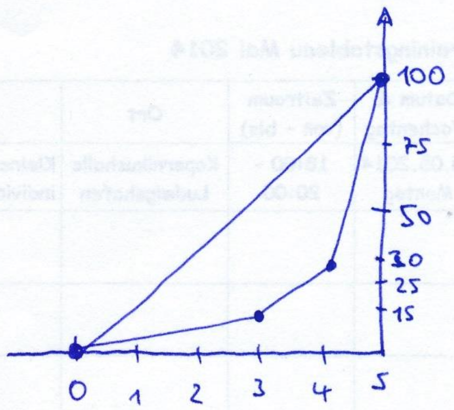
a) Sei die Konzentration auf einem Produktmarkt mit 5 Anbietern wie folgt: 3 Anbieter besitzen je 5% Marktanteil, ein Anbieter 15% und einer 70% Marktanteil. Der gesamte Umsatz betrage 10 Mrd. €.

Stellen Sie die zugehörige Lorenzkurve auf und ermitteln Sie den Gini-Koeffizient.

6

a) kum. Verteilungen

Anb.	Markt-anteil	kum. Anteil	kum Anbieter
1-3	5	15	3
4	15	30	4
5	70	100	5
		Y	X



GK: $KF_{Max} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 100 = 250$

KF: Fläche 1: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 15 = 22,5$

Fläche 2: $\frac{1}{2} (15+30) \cdot 1 = 22,5$

Fläche 3: $\frac{1}{2} (30+100) \cdot 1 = 65,0$

$110,0$ → 140

$$GK = \frac{250 - 110}{250} = \frac{140}{250} = 0,56$$

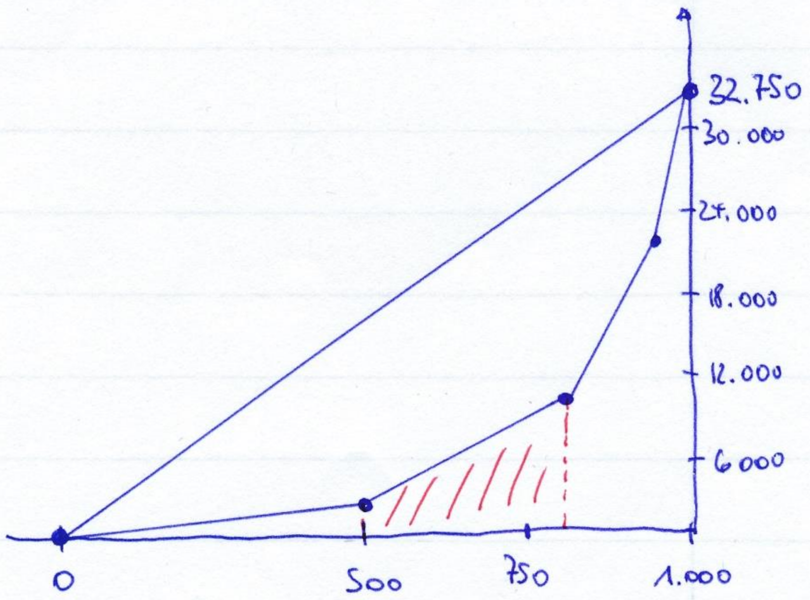
b) Für die Einzelhandelsunternehmen eines kleinen Bundeslandes sei folgende Übersicht betrachtet:

Umsatz in 1000 €	Anzahl der Einzelhandelsunternehmen
[0 ; 10[	500
[10 ; 50[	300
[50 ; 100[	150
[100 ; 300[	50

Berechnen Sie die Werte der Lorenzkurve und stellen Sie die errechneten Werte graphisch dar.
Ermitteln Sie zudem den Gini-Koeffizienten.

b). kum. Verteilungen

Einzelunt.	kum. EU	Umsatz	Σ Umsatz	kum. Σ-Umsatz
500	500	5	2.500	2.500
300	800	30	9.000	11.500
150	950	75	11.250	22.750
50	1.000	200	10.000	32.750



GK:

$KF_{max} = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 32.750 = 16.375.000$

KF :

Fläche 1: 625.000 $= \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 2500$

Fläche 2: 2.100.000 $= \frac{1}{2}(2.500 + 11.500) \cdot 300$

Fläche 3: 2.568.750 $= \frac{1}{2}(11.500 + 22.750) \cdot 150$

Fläche 4: 1.387.500 $= \frac{1}{2}(22.750 + 32.750) \cdot 50$

6.681.250 → 9.693.750

$GK = \frac{9.693.750}{16.375.000} = 0{,}592$

7.) Baumdiagramm und Pfadregeln

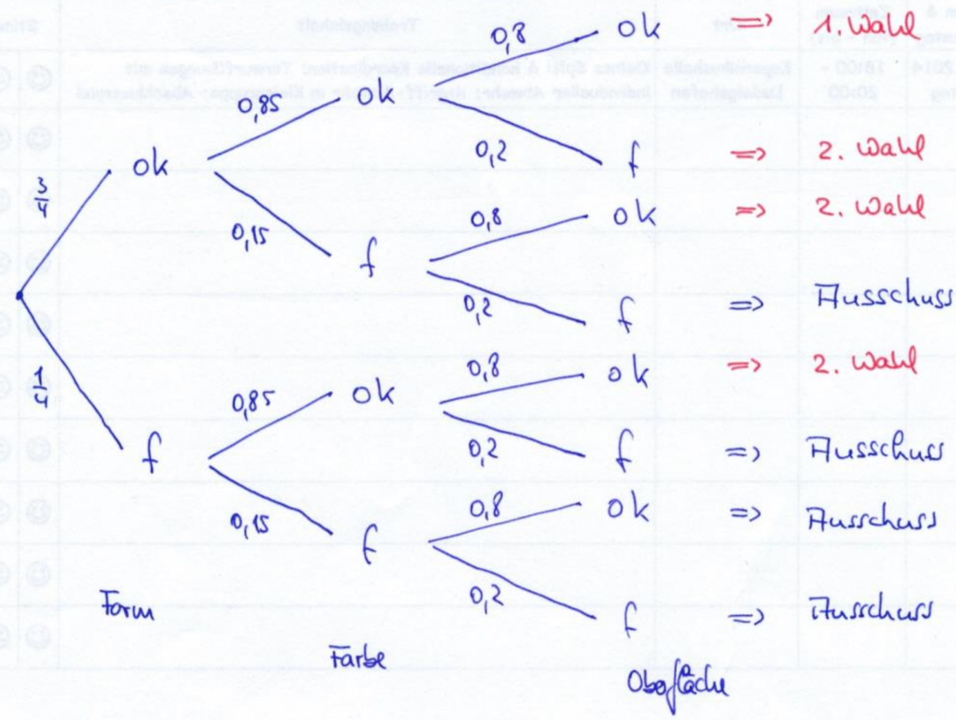
In einer Fabrik wird Porzellangeschirr hergestellt. Jedes Teil wird nacheinander in verschiedenen Kontrollgängen auf Form, Farbe und Oberflächenbeschaffenheit geprüft. Erfahrungsgemäß muss bei 25% die Form beanstandet werden. Die Farbkontrolle passieren 85% der Teile ohne Beanstandung. In 20% aller Fälle genügt die Oberfläche nicht den Ansprüchen der 1. Wahl. Nur wenn alle drei Kontrollen ohne Beanstandung durchlaufen sind, kann ein Teil als 1. Wahl verkauft werden. Ein Teil ist 2. Wahl, wenn die Qualität an nur einer Kontrollstelle nicht ausreicht. Alle übrigen Porzellanteile gelten als Ausschussware.

a) Stellen Sie die dreifache Kontrolle in einem Baumdiagramm dar.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 1. Wahl ist?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil 2. Wahl ist?

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil Ausschuss ist?



b) $P(\text{„1. Wahl"}) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}51$

c) $P(\text{„2. Wahl"}) = \left.\begin{array}{l} 0{,}75 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}2 \\ + 0{,}75 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}8 \\ + 0{,}25 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 \end{array}\right\} = 0{,}3875$

d) $P(\text{„Ausschuss"}) = 1 - 0{,}51 - 0{,}3875 = 0{,}1025$

8.) Satz von Bayes als Anwendung von Baumdiagramm und Pfadregeln

Taschenrechner werden in 4 verschiedenen Ländern nach folgenden Anteilen hergestellt: 2 : 3 : 4 : 1 (Indien, Südkorea, Japan und Bangladesch)
Leider entstehen immer wieder Fehlproduktionen:
Indien (4 %), Südkorea (2 %), Japan (3,5 %) und Bangladesch (8 %).

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein fehlerhaftes Produkt bei einer Gesamtlieferung aus allen vier Ländern?

b) Ein Taschenrechner wurde zu Kontrollzwecken entnommen und er funktioniert einwandfrei.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er aus Bangladesch?

⇨ **Lösung vgl. alte Übungsaufgaben**

9.) Normalverteilung I

Seien n = 1000 und p = 0,3

a) Die Anzahl der Erfolge mindestens 260.
b) Die Anzahl der Erfolge beträgt höchstens 340.
c) Die Anzahl der Erfolge liegt in der einfachen Sigma-Umgebung
d) In welcher Sigma-Umgebung liegen 99% aller Erfolge?

Lösung:

a) $$P(X \geq 260) = 1 - P(X \leq 259) = 1 - \Phi\left(\frac{259-300}{14,5}\right) = 0,9971$$

b) $$P(X \leq 340) = \Phi\left(\frac{340-300}{14,5}\right) = 0,9971$$

c) $$P(285,5 \leq X \leq 314,5) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,68269$$

d) Das Intervall lautet: [262 ; 338]

10.) Normalverteilung II

Eine Münze wird 250 Mal geworfen. Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten.

a) Es erscheint mehr als 120 Mal Kopf.
b) Es erscheint weniger als 128 Mal Kopf.
c) Mindestens 115 Mal und höchstens 135 erscheint der Kopf.
d) In welchem Bereich liegt das 95%-Intervall?

Lösung:

a) $$P(X > 120) = 1 - P(X \le 120) = 1 - \Phi\left(\frac{120-125}{8,2}\right) = 0,72907$$

b) $$P(X < 128) = P(X \le 127) = \Phi\left(\frac{127-125}{8,2}\right) = 0,59483$$

c) $$P(115 \le X \le 135) = 2\Phi\left(\frac{10}{8,2}\right) - 1 = 0,77754$$

d) Das Intervall lautet: [108 ; 142] bzw. [109 ; 141]