

Klausur: Statistik

Jürgen Meisel

Zugelassene Hilfsmittel: nicht progr. Taschenrechner

Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

1.) Mittelwerte und Streumaße

Eine Tabelle zur Gehaltsstruktur der Abteilung Marketing zeigt folgenden Inhalt:

Stufe	1	2	3	4
Gehalts-spanne	$[0; 1.500[$	$[1.500; 2.500[$	$[2.500; 5.000[$	$[5.000; 10.000[$
abs. Häufigkeit	10	6	2	2

- a) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.

Lösung:

$$\bar{x} = \frac{1}{20} \cdot (10 \cdot 750 + 6 \cdot 2.000 + 2 \cdot 3.750 + 2 \cdot 7.500)$$

$$\bar{x} = 2.100$$

- b) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.

Lösung:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \mu^2$$

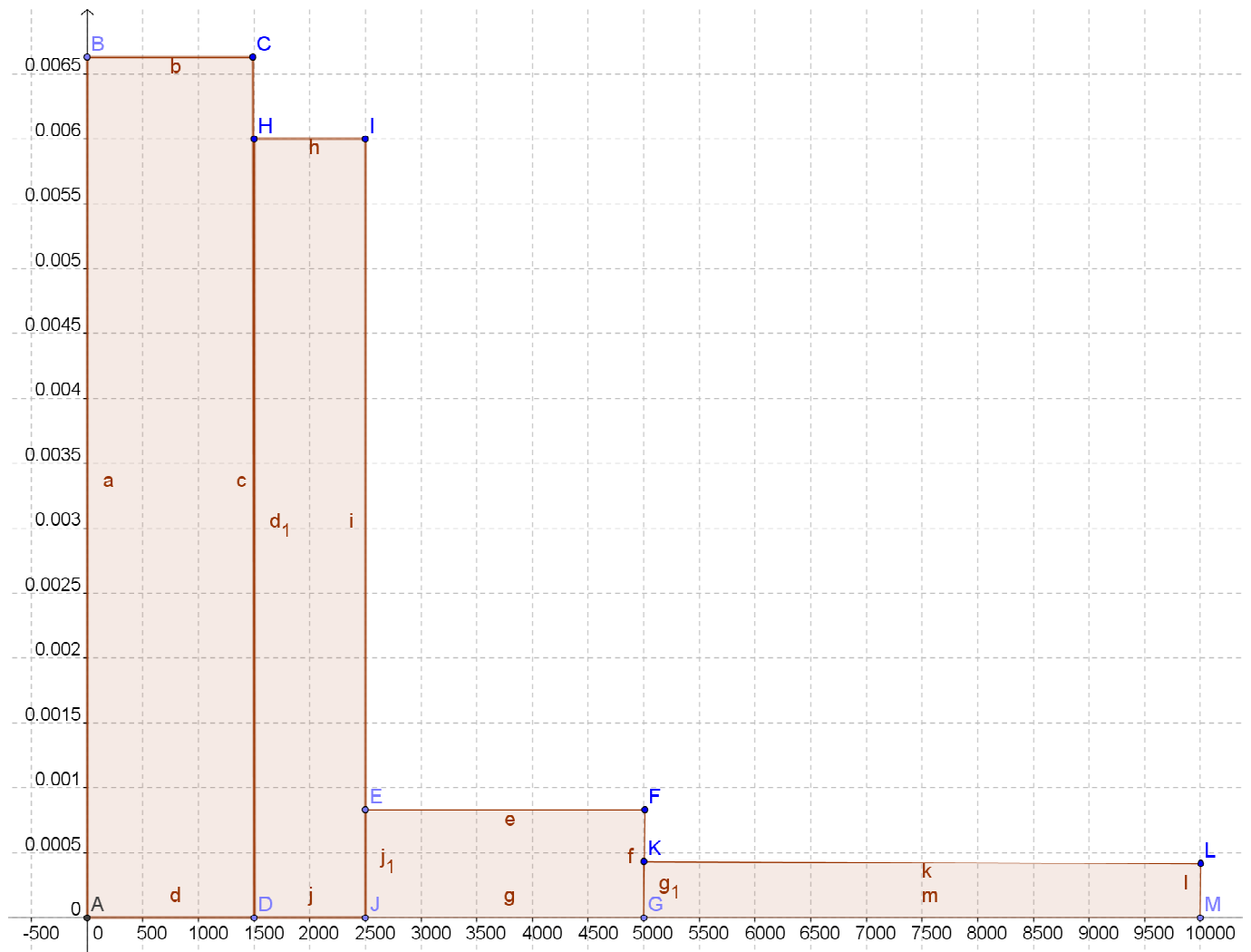
$$\sigma^2 = \frac{1}{20} \cdot \sum_{i=1}^{20} (x_i)^2 - 2.100^2 = 8.512.500 - 4.410.000$$

$$\sigma^2 = 4.102.500$$

$$\sigma = \sqrt{4.102.500} = 2.025,46$$

c) Erstellen Sie ein Histogramm.

Lösung:

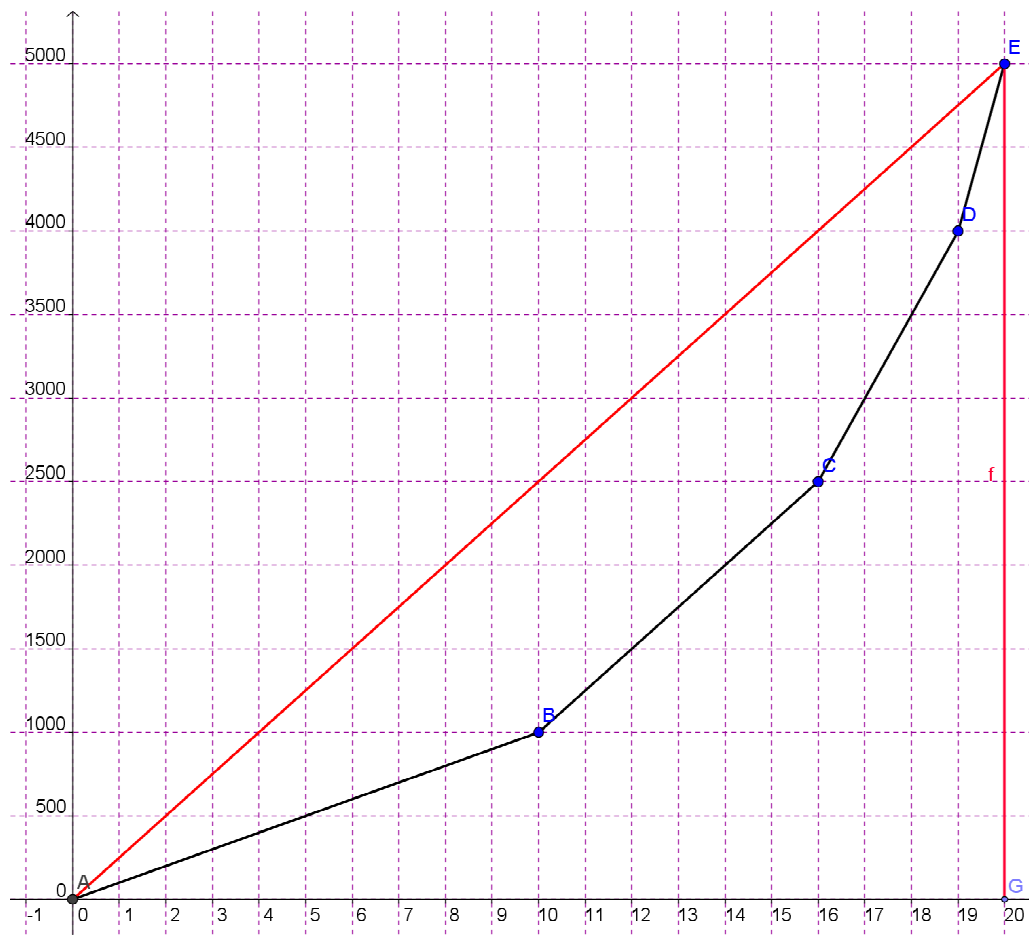


Verwenden Sie bitte für die folgenden Aufgaben die nebenstehende Lorenzkurve:

d) Erstellen Sie aus der Lorenzkurve bzw. den Eck-/Datenpunkten die nachfolgenden Inhalte der Tabelle:

Stufe	1	2	3	4
Gehalt pro Mitarbeiter	100,00	250,00	500,00	1.000,00
Gehaltssumme pro Stufe	1.000,00	1.500,00	1.500,00	1.000,00
abs. Häufigkeit. (Mitarbeiter)	10	6	3	1
absolute Summenhäufigkeit	10	16	19	20

- e) Berechnen Sie den Gini-Koeffizient, mit der folgenden Lorenzkurve als Grundlage?



Nachfolgend die Angabe der Eck-/Datenpunkte:

A (0/0) B (10/1.000) C (16/2.500) D (19/4.000) E (20/5.000)

Lösung:

Fläche unterhalb der Lorenzkurve:

$$\left. \begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{2} \cdot (0 + 1.000) \cdot 10 = 5.000 \\
 A_2 &= \frac{1}{2} \cdot (1.000 + 2.500) \cdot 6 = 10.500 \\
 A_3 &= \frac{1}{2} \cdot (2.500 + 4.000) \cdot 3 = 9.750 \\
 A_4 &= \frac{1}{2} \cdot (4.000 + 5.000) \cdot 1 = 4.500
 \end{aligned} \right\} 29.750$$

$$\max KF = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 5.000 = 50.000$$

$$GK = \frac{50.000 - 29.750}{50.000} = 1 - \frac{29.750}{50.000} = 0,405$$

2.) Preisindizes

Folgende Übersichten sind Ihnen leider etwas unvollständig gegeben:

=> Berechnen Sie hieraus den Preisindex nach Laspeyres.

<i>i</i>	Energie	Liefermenge im Basisjahr	Liefermenge im Berichtsjahr	Mengenummesszahl
		q_{i0}	q_{it}	q_{it} / q_{i0}
1	Öl	70000 [Liter]	84000 [Liter]	1,2
2	Gas	10000 [m ³]	24000 [m ³]	2,4
3	Elektrizität	280000 [kWh]	420000 [kWh]	1,5

<i>i</i>	Energie	Umsatz im Basisjahr	Umsatzanteil im Basisjahr	Umsatz im Berichtsjahr	Umsatzanteil im Berichtsjahr
		$p_{i0} \cdot q_{i0}$	g_i^L	$p_{it} \cdot q_{it}$	g_i^P
1	Öl		3/12	25200 [€]	5/12
2	Gas		1/12	10080 [€]	2/12
3	Elektrizität		8/12	25200 [€]	5/12
Σ	Energie	33600 [€]	1	60480 [€]	1

Lösung:

$$L_P = \frac{\sum p_{1i} \cdot q_{0i}}{\sum p_{0i} \cdot q_{0i}}$$

$$L_P = \frac{70.000 \cdot 0,3 + 10.000 \cdot 0,42 + 280.000 \cdot 0,06}{33.600} = 1,25$$

Preise:

$$p_{11} = \frac{25.200}{84.000} = 0,3 \quad p_{12} = \frac{10.080}{24.000} = 0,42$$

$$p_{13} = \frac{25.200}{420.000} = 0,06$$

3.) Satz von Bayes und Binomialverteilung

Eine Autowerkstatt rüstet Autos mit elektronischen Wegfahrsperren und Alarmanlagen aus.

Der Lagerbestand besteht zu 40 % aus Wegfahrsperren vom Typ I, zu 25 % vom Typ II und zu 35 % aus Wegfahrsperren vom Typ III.

Die Ausschussquote liegt bei Typ I bei 3 %, bei Typ II bei 6 % und bei Typ III bei 4 %.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig aus dem Lager entnommene Wegfahrsperre Ausschuss?

Lösung:

$$P(A) = 0,4 \cdot 0,03 + 0,25 \cdot 0,06 + 0,35 \cdot 0,04$$

$$P(A) = 0,041$$

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig entnommene einwandfreie Wegfahrsperre vom Typ II?

Lösung:

$$P_{\text{einwandfrei}}(\text{Typ II}) = \frac{0,25 \cdot 0,94}{0,959} = \frac{0,235}{0,959} = 0,245$$

Die Lieferfirma sucht in der laufenden Produktion nach Ausschussstücken. Es werden 50 Wegfahrsperren des Typs II (Ausschussquote 6 %) geprüft. Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

- c) Ergebnis A: Es ist genau eine Wegfahrsperre Ausschuss.

Lösung:
$$B(X=1) = \binom{50}{1} 0,06^1 \cdot 0,94^{49} = 0,14467$$

- d) Ergebnis B: Es sind mehr als 2 Wegfahrsperren Ausschuss.

Lösung:

$$B(X > 2) = 1 - B(X \leq 2) = 1 - B(X=2) - B(X=1) - B(X=0)$$

$$B(X > 2) = 1 - \binom{50}{2} 0,06^2 \cdot 0,94^{48} - 0,14467 - 0,94^{50}$$

$$B(X > 2) = 1 - 0,22624 - 0,14467 - 0,04533$$

$$B(X > 2) = 1 - 0,41624 = 0,583756$$

4.) Lineare Regression und Korrelation

Die Geschäftsführung hat eine Erhebung über die Umsätze und die Werbeausgaben für die vergangenen Quartale durchgeführt.

Quartal	2010/3	2010/4	2011/1	2011/2	2011/3	2011/4
Umsatz [Mio. €]	3,0	3,7	2,5	2,7	3,0	4,2
Werbeetat [1.000 €]	10	12	7	10	8	10

- a) Stellen Sie den Umsatz (y) in Abhängigkeit vom Werbeetat (x) durch eine Funktion $y = b_0 + b_1x$ dar.

Lösung:

$$\mu_x = 9,5 \quad \mu_y = 3,183$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{6} \cdot 184,9 - 9,5 \cdot 3,183}{\frac{1}{6} \cdot 557 - 90,25} = \frac{0,575}{2,583} = 0,22258$$

$$b_0 = 3,183 - 0,22258 \cdot 9,5 = 1,06882$$

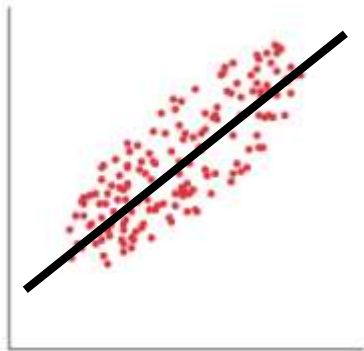
$$y = 1,06882 + 0,22258 \cdot x$$

- b) Wie hoch wäre demnach der Umsatz bei einem Werbeetat von 15.000,00 €?

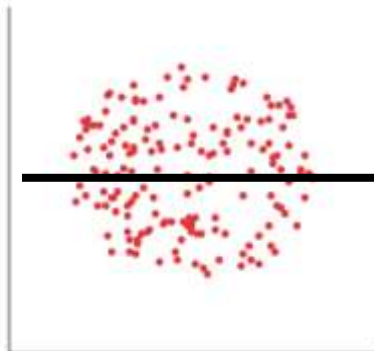
Lösung:

$$y = 1,06882 + 0,22258 \cdot 15 = 4,40752 \approx 4,41 [\text{Mio.}]$$

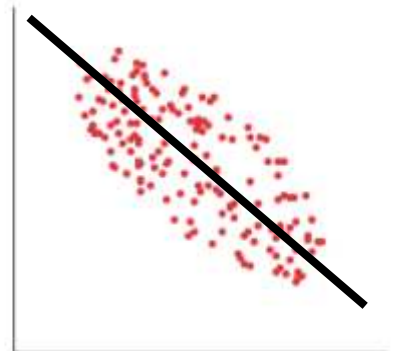
- c) Geben Sie den Wert des Korrelationskoeffizienten an (Schätzung) und skizzieren Sie jeweils die zugehörige Regressionsgerade; begründen Sie kurz Ihren Koeffizientenwert und die Zeichnung.



1



2



3

Lösung:

- (1) Korrelationskoeffizient: 0,4 bis 0,8
=> **positive Korrelation der beiden Merkmale**
- (2) Korrelationskoeffizient: - 0,3 bis 0,3
=> **keine Korrelation der beiden Merkmale**
- (3) Korrelationskoeffizient: - 0,8 bis - 0,4
=> **negative Korrelation der beiden Merkmale**