Klausur: Mathematik
am Montag, den 30. Januar 2006

Jürgen Meisel
FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und nicht progr. Taschenrechner
Bearbeitungszeit: **60 Minuten**

1.) **Integralrechnung**

a) Ermitteln Sie das Marktgleichgewicht zwischen Angebot und Nachfrage:

$$p_A(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4 \qquad \text{und} \qquad p_N(x) = -x + 12$$

Lösung:

$$\frac{1}{4}x^2 + 4 = -x + 12$$

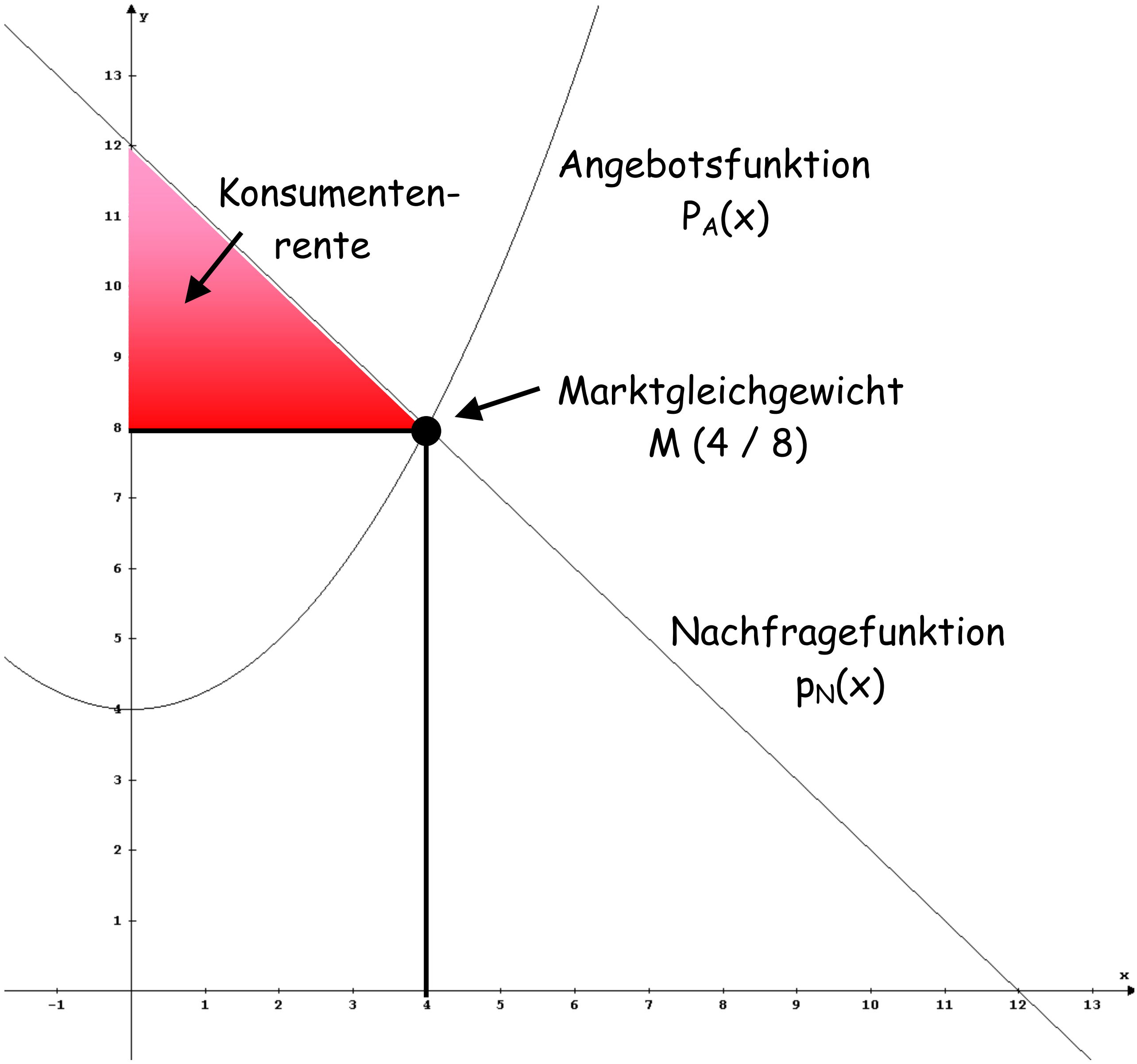
$$\xrightarrow{+x-12} \frac{1}{4}x^2 + x - 8 = 0 \xrightarrow{\textit{Lösungsformel}} x_1 = 4 \quad \wedge \quad x_2 = -8$$

$$p_N(4) = -4 + 12 = 8 \quad \Rightarrow \quad M(4 \mid 8)$$

b) Ermitteln Sie die **Konsumentenrente** bei p = 8.

Lösung:

$$K_R = \int_0^4 (-x + 12)\,dx - 4 \cdot 8 = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 12x\right]_0^4 - 32 = 8$$



2.) **Ableitungen:**

Bilden Sie die jeweils erste (partielle) Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2(x-1)$

b) $f(x) = \sum_{i=0}^{4} \left[(i+1) \cdot x^i \right]$

c) $f(x,y) = xy^2 + x^3y - xy$

Lösung:

$$f\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Produktregel}} \quad f'\left(x\right)=2x\left(x-1\right)+x^2=3x^2-2x$$

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{4}\left[\left(i+1\right)\cdot x^i\right]=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} \quad f'\left(x\right)=2+6x+12x^2+20x^3=\sum_{i=0}^{4}\left[i\left(i+1\right)\cdot x^{i-1}\right]$$

$$f\left(x,y\right)=xy^2+x^3y-xy$$

$$\xrightarrow{\text{Potenzregel}} \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)=y^2+3x^2y-y \quad und \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=2xy+x^3-x$$

3.) **Determinanten**

Für welche Werte von a ist die Matrix regulär?

$$A_a=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ a & -1 & 3\\ a & 2 & a\end{pmatrix}$$

Lösung:

$$A_a \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(A_a\right)\neq 0$$

$$\det\left(A_a\right)=-a+6a+2a^2+a^2-6-2a^2\overset{!}{=}0$$

$$a^2+5a-6=0 \quad \xrightarrow{\textit{Lösungsformel}} \quad a_1=1 \quad \wedge \quad a_2=-6$$

$$A_a \text{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(A_a\right)\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in\Re\setminus\left\{-6\,;1\right\}$$

4.) **Kurvendiskussion**

Untersuchen Sie die Funktion $f_t\left(x\right)$ mit der Vorschrift

$$f_t\left(x\right)=t^2x^3-tx^2-x \qquad mit \quad t>0$$

nach folgenden Kriterien:

a) Nullstellen

b) Extrema

c) Wendepunkte

d) Ortskurve der Minima

Lösung:

$$f_t(x) = t^2x^3 - tx^2 - x \qquad mit \quad t > 0$$

Nullstellen:

$$f_t(x) = x\left(t^2x^2 - tx - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2t}$$

Extrema:

$$f_t'(x) = 3t^2x^2 - 2tx - 1 \overset{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{\text{Lösungsformel}} \quad x_1 = \frac{1}{t} \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{3t}$$

$$f_t''(x) = 6t^2x - 2t$$

$$f_t''\left(\frac{1}{t}\right) = 6t^2 \cdot \frac{1}{t} - 2t = 4t > 0 \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{1}{t} \;\middle|\; -\frac{1}{t}\right)$$

$$f_t''\left(-\frac{1}{3t}\right) = 6t^2 \cdot \left(-\frac{1}{3t}\right) - 2t = -4t < 0 \quad \Rightarrow \quad Max\left(-\frac{1}{3t} \;\middle|\; \frac{5}{27t}\right)$$

Wendepunkte:

$$f_t''(x) = 6t^2x - 2t \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3t}$$

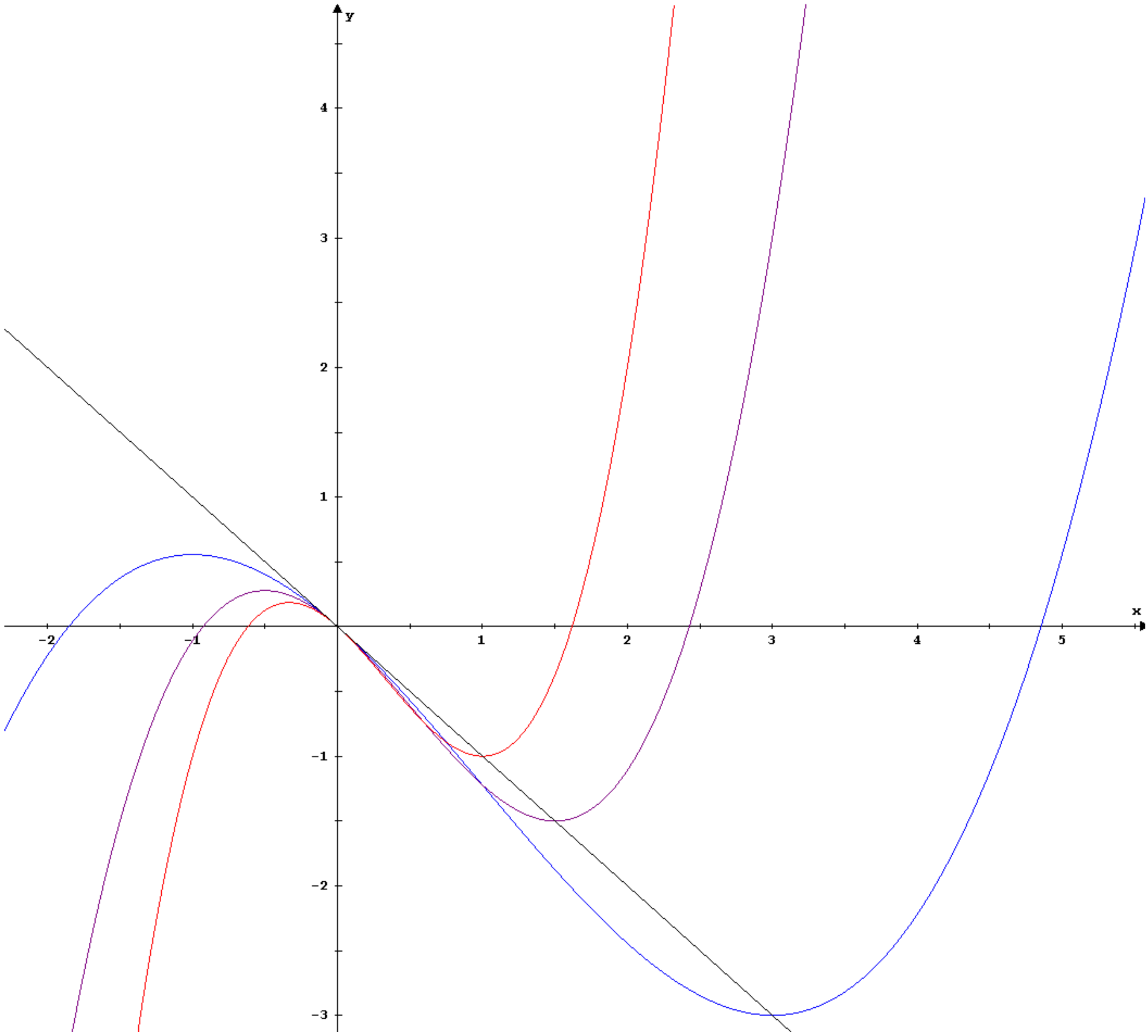
$$f_t'''(x) = 6t^2 \quad \Rightarrow \quad f_t'''\left(\frac{1}{3t}\right) = 6t^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{1}{3t} \;\middle|\; -\frac{11}{27t}\right)$$

Ortskurve der Minima:

$$Min\left(\frac{1}{t} \;\middle|\; -\frac{1}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\frac{1}{x}} = -x$$

Zeichnung der Funktion für die Parameterwerte von $t = \left\{ \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 1 \right\}$

und der Ortskurve der Minima bei y = - x



5.) **Optimum ohne und mit Nebenbedingungen**

a) Ermitteln Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f\,(x,y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Lösung:

$$f\,(x,y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$

$$I.)\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 2x - 6y \stackrel{!}{=} 0 \quad \xrightarrow{II.)\ x=y\ \ in\ I.)} \quad 4x^3 + 2x - 6x \stackrel{!}{=} 0$$

$$II.)\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x + 6y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = y$$

$$4x\left(x^2 - 1\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = 1 \quad \wedge \quad x_3 = -1$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 0 \quad \wedge \quad y_2 = 1 \quad \wedge \quad y_3 = -1$$

Es resultieren 3 stationäre Stellen:

$$S_1(0 \mid 0 \mid 0) \quad \wedge \quad S_2(1 \mid 1 \mid -1) \quad \wedge \quad S_3(-1 \mid -1 \mid -1)$$

$$Hesse-Matrix:$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{S_i\ einsetzen}$$

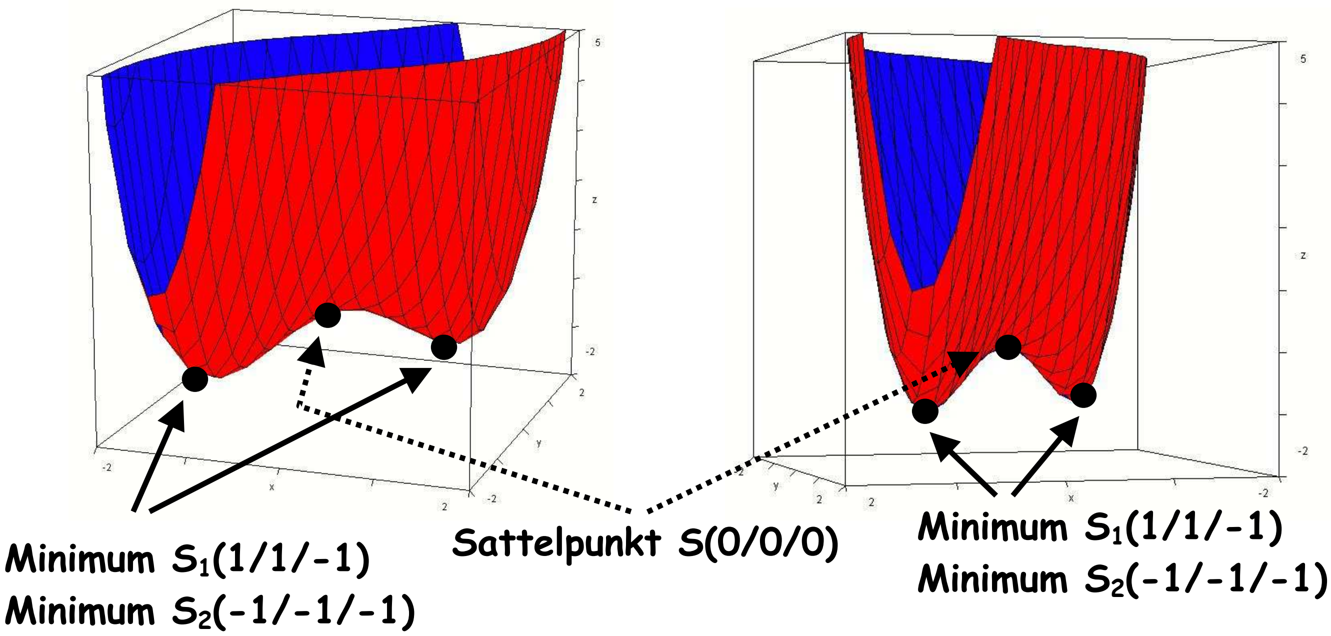
$$H\left(f\,(0 \mid 0)\right) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) < 0 \quad \Rightarrow \quad Sattelpunkt$$

$$H\left(f\,(1 \mid 1)\right) = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} > 0 \quad \Rightarrow \quad Min_1(1 \mid 1 \mid -1)$$

$$H\left(f\,(-1 \mid -1)\right) = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(H) > 0 \quad \wedge \quad f_{xx} > 0$$

$$\Rightarrow \quad Min_2(-1 \mid -1 \mid -1)$$

Graphische Veranschaulichung der Lösung:



b) Gegeben sei die Produktionsfunktion $q(x,y) = 8x^{0,3}y^{0,7}$

Eine Mengeneinheit von Faktor x kostet 6 €, eine Mengeneinheit von Faktor y kostet 5 €. Das Budget beträgt insgesamt 200 €.

Wie viel kann im optimalen Fall produziert werden?

<u>Lösung:</u>

$$L(x,y,\lambda) = 8x^{0,3}y^{0,7} + \lambda(200 - 6x - 5y)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = 2,4\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 6\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 0,4 \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = 5,6\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 5\lambda \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda = 1,12 \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$\mathit{Austauschverhältnis}:$$

$$0,4 \cdot \frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} = 1,12 \cdot \frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \Rightarrow y = 2,8x$$

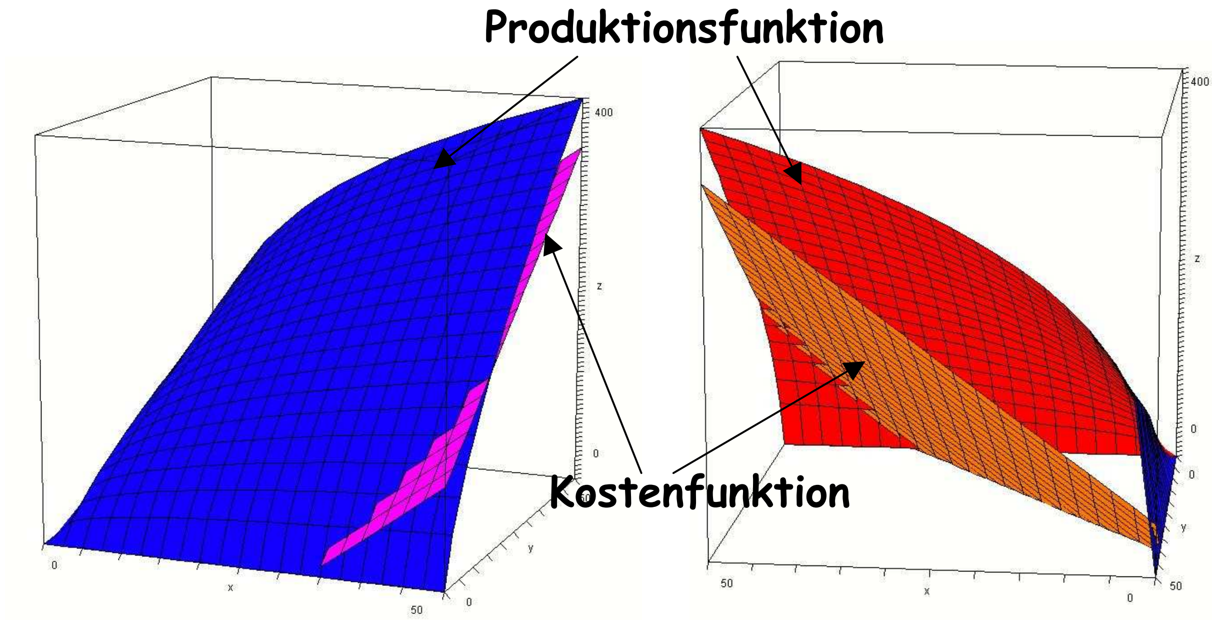
$$\mathit{eingesetzt\ in\ NB}:$$

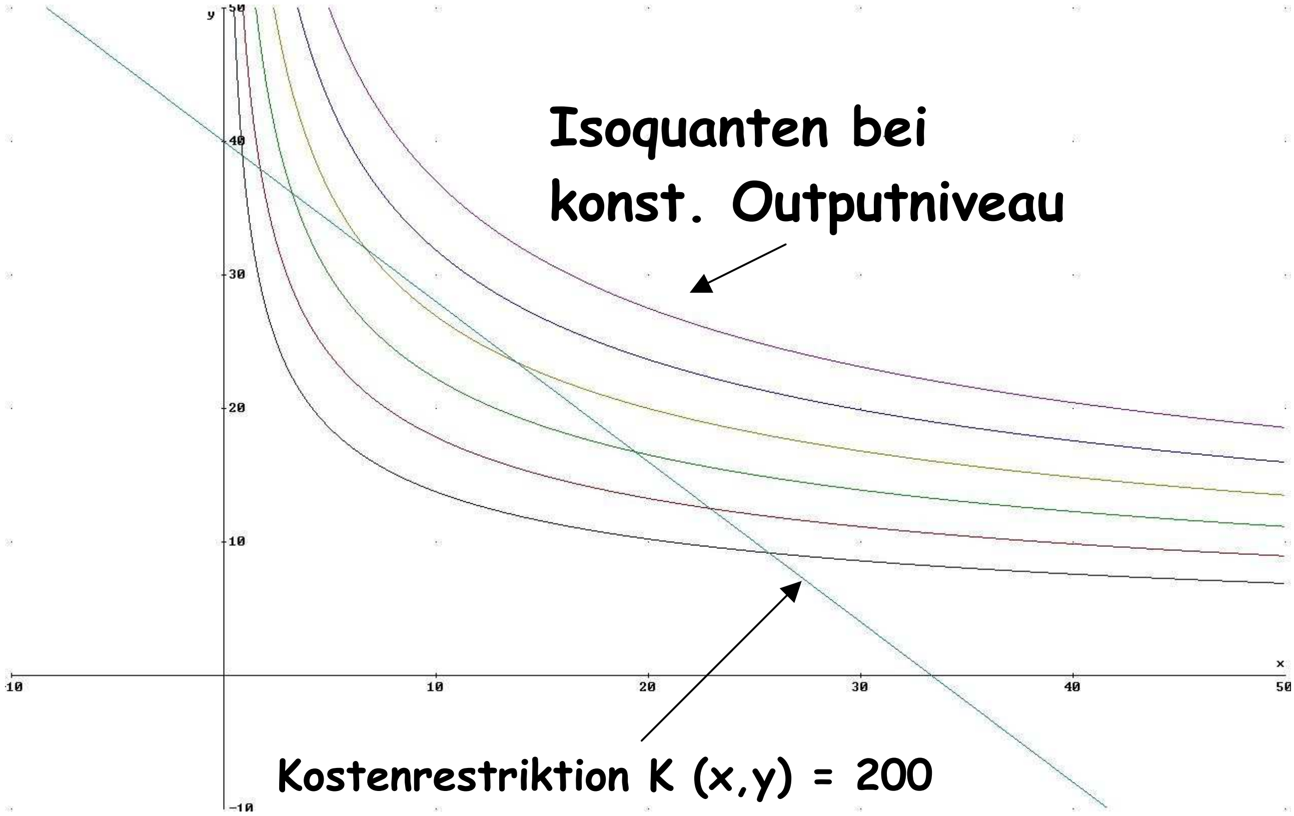
$$200 = 6x + 5y \xrightarrow{y=2,8x} 200 = 6x + 5 \cdot 2,8x$$

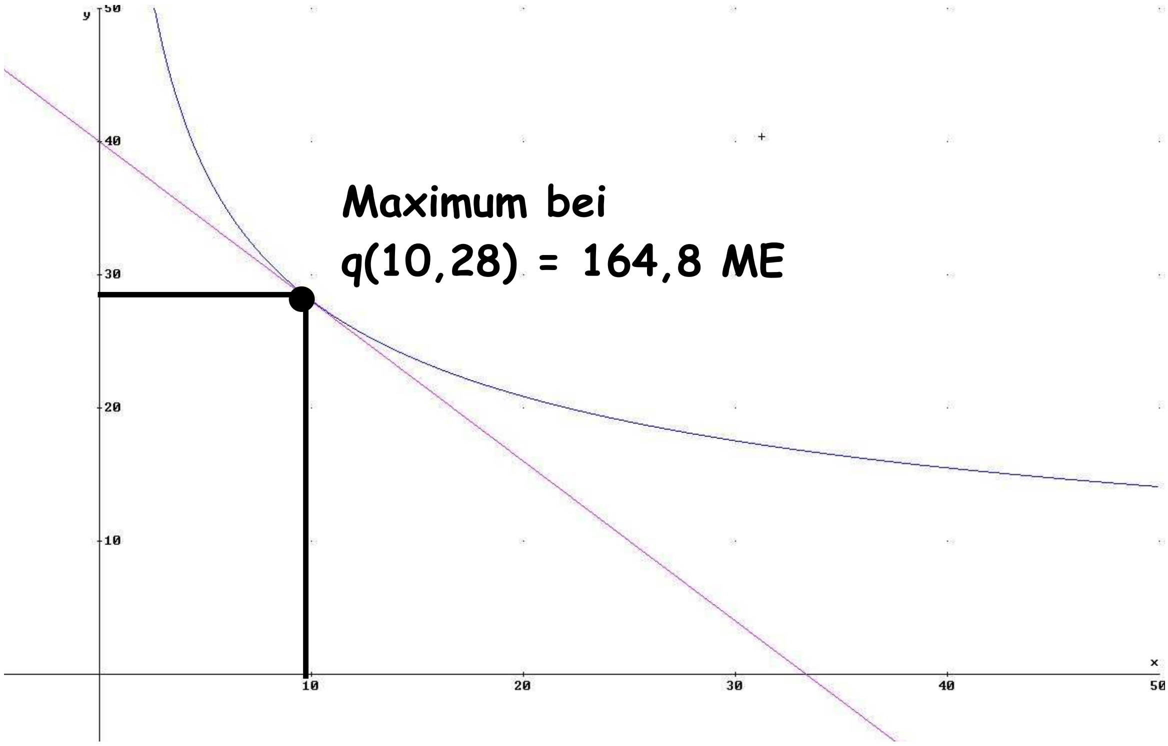
$$\Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 28$$

$$\Rightarrow q(10 \mid 28) = 8 \cdot 10^{0,3} \cdot 28^{0,7} = 164,8$$

Graphische Veranschaulichung der Lösung:







6.) **Ökonomische Anwendungen zu Matrizen**

Gegeben seien die Matrizen $M_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $M_{ZE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Wie viele Rohstoffe werden für je eine Mengeneinheit der Endprodukte benötigt?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 17 & 9 & 12 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Wie viele Rohstoffe müssen für einen Auftrag von 10 E_1, 20 E_2 und 10 E_3 im Lager vorrätig sein?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ 17 & 9 & 12 \\ 10 & 10 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 270 \\ 470 \\ 380 \end{pmatrix}$$

c) Nun hat man einen Lagerbestand an Rohstoffen von $R_1 = 165$, $R_2 = 286$ und $R_3 = 220$.

Wie viele Endprodukte E_1 und E_2 können hiermit hergestellt werden, wenn das Lager danach komplett leer sein sollte und $E_3 = 5$ gilt?

<u>Lösung:</u>

$$L_{\text{allgemein}} = \left\{ x_3 \in \Re \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-0,6x_3 \\ 11-0,2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_{\text{bestimmt}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Schrittweise Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 165 \quad (1)\\ 17x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 286 \quad (2)\\ 10x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 220 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 7/10\,x_3 &= 33/2 \quad (1)\\ 17x_1 + 9x_2 + 12x_3 &= 286 \quad (2)\\ 10x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 220 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 7/10\,x_3 &= 33/2 \quad (1)\\ 1/2\,x_2 + 1/10\,x_3 &= 11/2 \quad (2)\\ 10x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 220 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 7/10\,x_3 &= 33/2 \quad (1)\\ 1/2\,x_2 + 1/10\,x_3 &= 11/2 \quad (2)\\ 5x_2 + x_3 &= 55 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 1/2\,x_2 + 7/10\,x_3 &= 33/2 \quad (1)\\ x_2 + 1/5\,x_3 &= 11 \quad (2)\\ 5x_2 + x_3 &= 55 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3/5\,x_3 &= 11 \quad (1)\\ x_2 + 1/5\,x_3 &= 11 \quad (2)\\ 5x_2 + x_3 &= 55 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3/5\,x_3 &= 11 \quad (1)\\ x_2 + 1/5\,x_3 &= 11 \quad (2)\\ 0 &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

Unendlich viele Lösungen: 1 Parameter wählbar

$x_1 = 11 - 3/5\,x_3$

$x_2 = 11 - 1/5\,x_3$

x_3 beliebig wählbar