

Klausur: Mathematik
am Donnerstag, den 08. Januar 2004

Jürgen Meisel
 FH Ludwigshafen

Zugelassene Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung und ETR
 Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind **80 Punkte** erforderlich.

1.) Differentialrechnung

30

- a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f(x) = 10 \cdot e^{0,1x} \cdot x$$

auf Definitionsmenge, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Grenzwerte für $x \rightarrow \pm \infty$.

Skizzieren Sie anschließend die Funktion.

- b) Prüfen Sie die Funktion

$$f(x, y) = x \cdot y + \frac{2}{5}(y-2)^2 + \frac{1}{4}(x+4)^2$$

auf Extremwerte und geben Sie diese in Koordinatenform an.

2.) Elastizität

10

Für einen Haushalt gibt die Funktion $E(W)$ die Energieausgaben für die Wohnung an:

$$E(W) = 10 \cdot \sqrt{1+2W}$$

Weiterhin sind die Ausgaben für die Wohnung in folgender Weise vom verfügbaren Einkommen abhängig:

$$W(Y) = 400 + 0,05Y$$

gegeben.

- a) Bilden Sie den funktionalen Zusammenhang $E(Y)$.
- b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Elastizität, um wie viel Prozent sich bei einem Einkommen von 4.000,00 € der Energieverbrauch erhöht, wenn das Einkommen um 3 % steigt.

3.) Lineare Funktionen

15

Eine Autovermietung vermietet einen PKW über das Wochenende zu folgenden zwei alternativen Tarifen:

Tarif A: Grundmiete 50,00 €, zuzüglich km-Gebühren: für die ersten 100 km 0,60 €/km;
 für jeden km über 100 km bis 200 km 0,40 €/km;
 für jeden km über 200 km bis 400 km 0,30 €/km;
 jeder km über 400 km hinaus kostet 0,25 €/km;

Tarif B: Grundmiete 80,00 €, zuzüglich km-Gebühren: für die ersten 200 km 0,40 €/km;
 für jeden km über 200 km bis 500 km 0,20 €/km;
 jeder km über 500 km hinaus kostet 0,10 €/km;

- a) Zeichnen Sie die beiden Funktionen in ein Koordinatensystem mit zwei verschiedenen Farben.
- b) Ermitteln Sie die Kosten der beiden Tarife für 150 km, für 350 km und für 750 km.
- c) Ab wie viel km ist Tarif B gegenüber Tarif A vorteilhafter?

4.) Summenzeichen

20

Teil 1: a) $\sum_{i=1}^4 i^2$ b) $\sum_{i=-1}^2 \frac{i}{3i-1}$

Teil 2: a) $2-4+6-8+10-12$ b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$

Teil 3: $\sum_{i=1}^{5000} (2i-1)$

Teil 4: $\sum_{i=1}^n 5i = 275$

5.) Invertierung von Matrizen

5

Beweisen Sie folgende Aussage:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ ist die Inverse zu } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

6.) Extremwerte unter Nebenbedingungen

25	
----	--

Ein Unternehmen besitzt die Produktionsfunktion $q(A, K)$

$$q(A, K) = 2 A^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}.$$

Die Kosten für den Produktionsfaktor Arbeit A sind 5 GE, für den Faktor Kapital K sind 3 GE aufzuwenden.

- Wie groß ist der Output für $A = 10.000$ und $K = 256$.
- Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift für die Kostenfunktion.
- Wie hoch ist der maximale Output, wenn die Kosten 900 GE nicht überschreiten dürfen?
- Wie hoch sind die minimalen Kosten, wenn ein Output von 80 ME erreicht werden soll.
- Es liegt die Situation $q(10.000 / 256)$ vor.

Wieviel Kapital muss bei einer Reduzierung von 5.904 Einheiten Arbeit hinzugefügt werden, damit das Produktionsniveau gehalten werden kann?

7.) Materialberechnungen mit Matrizen

25	
----	--

Eine Unternehmung der Pharmabranche fertigt aus den pflanzlichen Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 zwei Grundsubstanzen G_1 und G_2 . Aus diesen werden die Präparate E_1 und E_2 hergestellt.

Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist durch die beiden folgenden Matrizen gegeben:

$$M_{RG} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad M_{GE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Bestimmen Sie die Matrix, die angibt, wie viel ME an pflanzlichen Rohstoffen pro ME der Präparate benötigt werden.
- Bestimmen Sie die Inverse zu M_{GE} .
- Das Unternehmen verarbeitet 50 ME an G_1 und 90 ME an G_2 .
Wieviele Präparate von E_1 und E_2 können damit hergestellt werden?
- Wieviele ME an Rohstoffen sind zur Herstellung von 20 ME des Präparats E_1 und 10 ME des Präparats E_2 notwendig?

8.) Integralrechnung

10	
----	--

Auf einem Markt existieren folgende Angebots- und Nachfragefunktionen:

Angebot: $p_A(x) = 4 + 2\sqrt{x}$

Nachfrage: $p_N(x) = 49 - \frac{1}{4}x$

- Wo liegt das Marktgleichgewicht?
- Ermitteln Sie die Konsumentenrente im Marktgleichgewicht.

9.) Iteration mit „NJUTN“(?) oder wie heißt der Mathematiker?

10	
----	--

Bestimmen Sie durch ein geeignetes Iterationsverfahren den Wert von

$\sqrt{11}$ auf 3 Stellen genau.