Übungen zur Klausurvorbereitung

- Lösungen -

1.) Newton-Iteration

Mit dem Newton-Verfahren soll eine Nullstelle der Funktion

$f(x) = x^4 + x - 1$ näherungsweise berechnet werden.

Wählen Sie x = 0 als Startwert und führen Sie zwei Iterationsschritte durch.

Lösung:

n	x_{n+1}	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - f(x_n)/f'(x_n)$
0	0	-1	1	1
1	1	1	5	0.8
2	0.8	0.2096	3.048	0.73123359
3	0.73123359	0.0171404359	2.56396993	0.724548480

2.) LGS I

Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: per Gauß-Verfahren

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \quad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ -x_2 - x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -2 \quad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ -x_2 - x_3 &= 1 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -2 \quad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \quad (1) \\ x_2 &= -3 \quad (2) \\ x_3 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 8$

$x_2 = -3$

$x_3 = 2$

3.) LGS II

Gegeben ist das inhomogene LGS in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-4 \\ 6t-2 \\ -12t \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix folgende Form annimmt: $4\left(t^3 - t^2 - 4t + 4\right)$

b) Für welche Werte von t ist das System nicht eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösung für t = 0.

Lösung:

a) Determinante per Sarrus-Regel ausrechnen

b) $t_1 = 1 \quad und \quad t_2 = 2 \quad und \quad t_3 = -2$

c)

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \ (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -2 \ (2) \\ 16x_3 &= 0 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \ (1) \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \ (2) \\ 16x_3 &= 0 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \ (1) \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \ (2) \\ x_3 &= 0 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -4 \ (1) \\ x_2 &= 2 \ (2) \\ x_3 &= 0 \ (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = -4$

$x_2 = 2$

$x_3 = 0$

4.) Funktionen mit mehreren Variablen

a) Gegeben ist die Funktion

$$f\left(x,y\right) \quad = \quad 4x^3 - 12xy - 24x + 6y^2 + 48$$

Bestimmen Sie Art und Lage der stationären Stellen von f.

<u>**Lösung:**</u>

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} \quad = \quad 12x^2 - 12y - 24 \quad = \quad 0$$

$$\xrightarrow{x=y} \quad x^2 - x - 2 \quad = \quad 0 \quad \to \quad x_1 = 2 \quad \wedge \quad x_2 = -1$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} \quad = \quad -12x + 12y \quad = \quad 0 \quad \to \quad x \quad = \quad y$$

2 stationäre Stellen:

$$\mathrm{S}_1\left(-1 \mid -1 \mid 62\right) \quad \mathit{und} \quad \mathrm{S}_2\left(2 \mid 2 \mid 8\right)$$

Kontrolle mit Hesse-Matrix:

$$H\left(f\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 24x & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$H_{\mathrm{S}_1}\left(f_1\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} -24 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathit{indefinit} \quad \to \quad \mathit{Sattelpunkt}$$

$$H_{\mathrm{S}_2}\left(f_2\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \quad \to \quad \mathit{positiv\ definit} \quad \to \quad \mathit{Minimum}$$

b) Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x(x-a)^2 - 4(y+b)^2$

(i) Für welche Werte von a, b hat die Funktion f an der Stelle (1 / -3) ein lokales Extremum?

(ii) Von welcher Art und wie groß ist es?

$$f(x,y) = x(x-a)^2 - 4(y+b)^2 = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 4y^2 - 8by - 4b^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 4ax + a^2 \rightarrow \frac{\partial f(1;-3)}{\partial x} = 3 - 4a + a^2$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \rightarrow a_1 = 1 \wedge a_2 = 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -8y - 8b \rightarrow \frac{\partial f(1;-3)}{\partial y} = 24 - 8b = 0 \rightarrow b = 3$$

2 Kombinationen für (a / b):

$$S_{(a/b)=(1/3)}(1 \mid -3 \mid f_1) \quad und \quad S_{(a/b)=(3/3)}(1 \mid -3 \mid f_2)$$

Kontrolle mit Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x-4a & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_{(a/b)=(1/3)}}(1 \mid -3 \mid f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{indefinit} \rightarrow \textit{Sattelpunkt}$$

$$H_{S_{(a/b)=(3/3)}}(1 \mid -3 \mid f_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{negativ definit} \rightarrow \textit{Maximum}$$

5.) Rechnen mit Matrizen und Determinanten

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $A \cdot (2A - E)$

Lösung: $$A(2A - E) = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

b) B^3 **Lösung:** $$B^3 = \begin{pmatrix} k^3 & 0 & 0 \\ 0 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix}$$

c) B^4 **Lösung:** $$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & k^4 & 0 \\ 0 & 0 & k^4 \\ k^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Det(A) **Lösung:** Det(A) = (-9)

e) $(B+E)^2$ **Lösung:** $$(B+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k^2 \\ k^2 & 1 & 2k \\ 2k & k^2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Funktionen mit einer Variablen

Gegeben ist folgende Funktion: $f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}k^2x^2 \quad mit\ k > 0$

a) Berechnen Sie Wendestelle.
Bitte mit vollständigem Nachweis (hinreichende Bedingung).

<u>**Lösung:**</u>

$$f_k'(x) \quad = \quad -x^3 + \frac{3}{4}k^2x$$

$$f_k''(x) \quad = \quad -3x^2 + \frac{3}{4}k^2 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \quad = \quad \frac{1}{4}k^2 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad \pm\frac{1}{2}k$$

$$f_k'''(x) \quad = \quad -6x \quad \xrightarrow{x \;=\; \pm\frac{1}{2}k} \quad f_k'''\left(\left|\frac{1}{2}k\right|\right) \quad = \quad 3k$$

b) Bestimmen Sie von dieser Funktion die <u>**Ortskurve**</u> der Wendepunkte.

<u>**Lösung:**</u>

$$x \quad = \quad \pm\frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad \pm 2x$$

$$f_{2x}(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}4x^2 \cdot x^2 \quad = \quad \frac{5}{4}x^4$$

7.) Binomischer Lehrsatz

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $$\left(2x-\frac{3}{2}\right)^8$$

Lösung:

$$256\cdot x^8 - 1536\cdot x^7 + 4032\cdot x^6 - 6048\cdot x^5$$
$$+ 5670\cdot x^4 - 3402\cdot x^3 + 1275{,}75\cdot x^2 - 273{,}375\cdot x + 25{,}62890625$$

b) $$\left(\frac{2}{5}x+3y\right)^4$$

Lösung:

$$0{,}0256\cdot x^4 + 0{,}768\cdot x^3\cdot y + 8{,}64\cdot x^2\cdot y^2 + 43{,}2\cdot x\cdot y^3 + 81\cdot y^4$$

8.) Extrema unter Nebenbedingungen

Berechnen Sie das Optimum der Funktion $f(x,y) = 3x^{0,3}y^{0,7}$

unter folgender Nebenbedingung: $1.000 = 2x+5y$

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 3x^{0,3}y^{0,7} + \lambda(1.000 - 2x - 5y)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = 0,9\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 2\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0,45\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2,1\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 5\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0,42\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$0,45\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} = 0,42\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \rightarrow y = \frac{14}{15}x$$

in Nebenbedingung einsetzen:

$$1.000 = 2x + 5\cdot\frac{14}{15}x \rightarrow 1.000 = \frac{20}{3}x \rightarrow x = 150 \rightarrow y = 140$$