Übungen zur Klausurvorbereitung

1.) LGS I

Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: per Gauß-Verfahren

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \ (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \ (2) \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 1 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \ (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \ (2) \\ -x_2 - x_3 &= 1 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -2 \ (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \ (2) \\ -x_2 - x_3 &= 1 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -2 \ (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \ (2) \\ x_3 &= 2 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \ (1) \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \ (2) \\ x_3 &= 2 \ (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 8 \ (1) \\ x_2 &= -3 \ (2) \\ x_3 &= 2 \ (3) \end{aligned}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = 8$

$x_2 = -3$

$x_3 = 2$

2.) LGS II

Gegeben ist das inhomogene LGS in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-4 \\ 6t-2 \\ -12t \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix folgende Form annimmt: $4\left(t^3 - t^2 - 4t + 4\right)$

b) Für welche Werte von t ist das System nicht eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösung für t = 0.

Lösung:

a) Determinante per Sarrus-Regel ausrechnen

b) $t_1 = 1 \quad und \quad t_2 = 2 \quad und \quad t_3 = -2$

c)

$$\begin{array}{lr} x_1 & = -4\ (1) \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = -2\ (2) \\ 16x_3 & = 0\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} x_1 & = -4\ (1) \\ x_2 - 2x_3 & = 2\ (2) \\ 16x_3 & = 0\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} x_1 & = -4\ (1) \\ x_2 - 2x_3 & = 2\ (2) \\ x_3 & = 0\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} x_1 & = -4\ (1) \\ x_2 & = 2\ (2) \\ x_3 & = 0\ (3) \end{array}$$

Genau eine Lösung

$x_1 = -4$

$x_2 = 2$

$x_3 = 0$

3.) LGS III

Gegeben sei folgendes LGS: $\begin{pmatrix} 4 & -2t & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 2 & t & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix}$

Für welche Werte von **t** hat das LGS

(i) eine **<u>eindeutige</u>** Lösung? (ii) keine Lösung?

(iii) unendlich viele Lösungen?

Lösung: Determinante per Sarrus-Regel ausrechnen

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -2t & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 2 & t & 3 \end{pmatrix} = 0 - 4t + 0 - 0 - 4t + 6t^2 = 6t^2 - 8t$$

$$\rightarrow\ 6t^2 - 8t = 0 \ \rightarrow\ t_1 = 0 \ \vee\ t_2 = \frac{4}{3}$$

$t = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow\ x = \frac{1}{2} \ \text{und}\ \ z = 2 \ \rightarrow\ \textit{Widerspruch in Zeile } 3 \ \rightarrow\ \textit{keine Lösung}$$

$t = \frac{4}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -\frac{8}{3} & 0 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 & 2 \\ 2 & \frac{4}{3} & 3 & -\frac{4}{3} \end{array}\right) \rightarrow\ \textit{Widerspruch in Zeile } 3 \ \rightarrow\ \textit{keine Lösung}$$

4.) Funktionen mit mehreren Variablen

a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4x^3 - 12xy - 24x + 6y^2 + 48$$

Bestimmen Sie Art und Lage der stationären Stellen von f.

Lösung:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 12x^2 - 12y - 24 = 0$$

$$\xrightarrow{x=y} x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = -1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -12x + 12y = 0 \rightarrow x = y$$

2 stationäre Stellen:

$S_1(-1 \mid -1 \mid 62)$ *und* $S_2(2 \mid 2 \mid 8)$

Kontrolle mit Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 24x & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f_1) = \begin{pmatrix} -24 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{indefinit} \rightarrow \textit{Sattelpunkt}$$

$$H_{S_2}(f_2) = \begin{pmatrix} 48 & -12 \\ -12 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{positiv definit} \rightarrow \textit{Minimum}$$

b) Ermitteln Sie die sechs stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}y^4 - 2y^3 + \frac{5}{2}y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

Lösung: **Wird in VL gerechnet**

c) Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x(x-a)^2 - 4(y+b)^2$

(i) Für welche Werte von a, b hat die Funktion f an der Stelle (1 / -3) ein lokales Extremum?

(ii) Von welcher Art und wie groß ist es?

Lösung:

$$f(x,y) = x(x-a)^2 - 4(y+b)^2 = x^3 - 2ax^2 + a^2x - 4y^2 - 8by - 4b^2$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - 4ax + a^2 \rightarrow \frac{\partial f(1;-3)}{\partial x} = 3 - 4a + a^2$$

$$\rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \rightarrow a_1 = 1 \wedge a_2 = 3$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -8y - 8b \rightarrow \frac{\partial f(1;-3)}{\partial y} = 24 - 8b = 0 \rightarrow b = 3$$

2 Kombinationen für $(\mathrm{a} / \mathrm{b})$:

$$\mathrm{S}_{(\mathrm{a}/\mathrm{b})=(1/3)}(1 \mid -3 \mid f_1) \quad und \quad \mathrm{S}_{(\mathrm{a}/\mathrm{b})=(3/3)}(1 \mid -3 \mid f_2)$$

Kontrolle mit Hesse-Matrix:

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x-4a & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$H_{\mathrm{S}_{(\mathrm{a}/\mathrm{b})=(1/3)}}(1 \mid -3 \mid f_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow indefinit \rightarrow Sattelpunkt$$

$$H_{\mathrm{S}_{(\mathrm{a}/\mathrm{b})=(3/3)}}(1 \mid -3 \mid f_2) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow negativ\ definit \rightarrow Maximum$$

5.) Rechnen mit Matrizen und Determinanten

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $A \cdot (2A - E)$ b) B^3 c) B^4

d) Det(A)   e) $(B+E)^2$

Lösung:

$$A(2A-E) = \begin{pmatrix} 15 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

b) B^3 **Lösung:**

$$B^3 = \begin{pmatrix} k^3 & 0 & 0 \\ 0 & k^3 & 0 \\ 0 & 0 & k^3 \end{pmatrix}$$

c) B^4 **Lösung:**

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & k^4 & 0 \\ 0 & 0 & k^4 \\ k^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Det(A) **Lösung:** Det(A) = (-9)

e) $(B+E)^2$ **Lösung:**

$$(B+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2k & k^2 \\ k^2 & 1 & 2k \\ 2k & k^2 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Funktionen mit einer Variablen

Gegeben ist folgende Funktion: $f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}k^2x^2 \quad mit\ k > 0$

Bestimmen Sie von dieser Funktion die **Ortskurve** der Wendepunkte.

Lösung: Wendepunkte

$$f_k'(x) \quad = \quad -x^3 + \frac{3}{4}k^2x$$

$$f_k''(x) \quad = \quad -3x^2 + \frac{3}{4}k^2 \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad x^2 \quad = \quad \frac{1}{4}k^2 \quad \rightarrow \quad x \quad = \quad \pm\frac{1}{2}k$$

$$f_k'''(x) \quad = \quad -6x \quad \xrightarrow{x \ = \ \pm\frac{1}{2}k} \quad f_k'''\left(\left|\frac{1}{2}k\right|\right) \quad = \quad 3k$$

Ortskurve der Wendepunkte

$$x \quad = \quad \pm\frac{1}{2}k \quad \rightarrow \quad k \quad = \quad \pm 2x$$

$$f_{2x}(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}4x^2 \cdot x^2 \quad = \quad \frac{5}{4}x^4$$

7.) Summen

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\sum_{k=1}^{100} k^2 - 4k + 2 \quad - \quad \sum_{k=0}^{102} 6k + 3$

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 4k + 2 \quad - \quad \sum_{k=0}^{102} 6k + 3 \quad = \quad \sum_{k=1}^{100} k^2 - 4k + 2 \quad - \quad 3 - \left(\sum_{k=1}^{100} 6k + 3\right) - 609 - 615$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{100} k^2 - 10k - 1 \quad - \quad 1.227 \quad = \quad \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - 10 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} - 100 \cdot 1 \quad - \quad 1.227$$

$$= \quad 338.350 - 50.500 - 100 \quad - \quad 1.227 \quad = \quad 286.523$$

b) $\sum_{k=12}^{50} 2k^3 - 4k^2 \quad + \quad \sum_{k=1}^{50} k - 3k^3$

Lösung:

$$\sum_{k=12}^{50} 2k^3 - 4k^2 \quad + \quad \sum_{k=1}^{50} k - 3k^3 \quad = \quad \sum_{k=1}^{50} 2k^3 - 4k^2 - \sum_{k=1}^{11} 2k^3 - 4k^2 \quad + \quad \sum_{k=1}^{50} k - 3k^3$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{50} \left(-k^3 - 4k^2 + k\right) - \sum_{k=1}^{11} 2k^3 - 4k^2 \quad = \quad -1.802.738$$

8.) Extrema unter Nebenbedingungen I

Berechnen Sie das Optimum der Funktion $f(x,y) \quad = \quad 3x^{0,3}y^{0,7}$

unter folgender Nebenbedingung: $1.000 \quad = \quad 2x + 5y$

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 3x^{0,3}y^{0,7} + \lambda\left(1.000 - 2x - 5y\right)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} \quad = \quad 0,9\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} - 2\lambda \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,45\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} \quad = \quad 2,1\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} - 5\lambda \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 0,42\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}}$$

$$0,45\frac{y^{0,7}}{x^{0,7}} \quad = \quad 0,42\frac{x^{0,3}}{y^{0,3}} \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{14}{15}x$$

in Nebenbedingung einsetzen:

$$1.000 \quad = \quad 2x + 5\cdot\frac{14}{15}x \quad \rightarrow \quad 1.000 \quad = \quad \frac{20}{3}x \quad \rightarrow \quad x = 150 \quad \rightarrow \quad y = 140$$

9.) Optimum mit Nebenbedingungen II

Gegeben sei die Kostenfunktion $k(x,y) \quad = \quad 15x + 20y$

Das gewünschte Produktionsniveau beträgt: $4.000 \quad = \quad 8x^{0,75}y^{0,25}$

Bestimmen Sie das minimale Kostenkombination und die daraus resultierenden Gesamtkosten.

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) \quad = \quad 15x+20y+\lambda\left(4.000-8x^{0,75}y^{0,25}\right)$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} \quad = \quad 15-8\lambda\frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad \frac{15}{8}\cdot\frac{y^{0,25}}{x^{0,25}}$$

$$\frac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} \quad = \quad 20-2\lambda\frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \quad = \quad 0 \quad \rightarrow \quad \lambda \quad = \quad 10\cdot\frac{x^{0,75}}{y^{0,75}}$$

$$\frac{15}{8}\cdot\frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} \quad = \quad 10\cdot\frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \quad \rightarrow \quad y \quad = \quad \frac{16}{3}x$$

in Nebenbedingung einsetzen:

$$4.000 \quad = \quad 8\cdot x^{0,75}\cdot\left(\frac{16}{3}x\right)^{0,25} \rightarrow 4.000 \quad = \quad \frac{16}{\sqrt[4]{3}}x \rightarrow x \approx 329 \rightarrow y = 1.754,77$$

$$Kosten: \quad k(329/1.754,77) \quad = \quad 40.030,31[GE]$$

10.) Ableitungen

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $$f(x,y,z) \quad = \quad \frac{\left(4y^2-3\right)^5}{x^6}+z^2$$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) \quad = \quad (-6)\cdot\frac{\left(4y^2-3\right)^5}{x^7} \quad und$$

$$f_y(x,y,z) \quad = \quad \frac{5\left(4y^2-3\right)^4\cdot 8y}{x^6} \quad = \quad \frac{40y\cdot\left(4y^2-3\right)^4}{x^6} \quad und \quad f_z(x,y,z) \quad = \quad 2z$$

b) $$f(x,y,z) \quad = \quad e^{3x^4y^2}\cdot\left(y^3-8z\right)+2xz$$

Lösung:

$$f_x(x,y,z) \quad = \quad 12x^3y^2\cdot e^{3x^4y^2}\cdot\left(y^3-8z\right)+2z$$

$$f_y(x,y,z) \quad = \quad 6x^4y\cdot e^{3x^4y^2}\cdot\left(y^3-8z\right)+e^{3x^4y^2}\cdot 3y^2 \quad = \quad e^{3x^4y^2}\cdot\left(6x^4y^4-48x^4yz+3y^2\right)$$

$$f_z(x,y,z) \quad = \quad (-8)e^{3x^4y^2}+2x$$