Übungen zur Klausurvorbereitung

1.) LGS I

Lösen Sie das Lineare Gleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.) LGS II

Gegeben ist das inhomogene LGS in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 2t \\ 1 & 1 & 2t-2 \\ t & t^3 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t-4 \\ 6t-2 \\ -12t \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix folgende Form annimmt: $4\left(t^3 - t^2 - 4t + 4\right)$

b) Für welche Werte von t ist das System nicht eindeutig lösbar?

c) Bestimmen Sie die Lösung für t = 0.

3.) LGS III

Gegeben sei folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2t & 0 \\ t & 0 & 1 \\ 2 & t & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -t \end{pmatrix}$$

a) Lösen Sie das LGS mit einem Verfahren Ihrer Wahl.

b) Für welche Werte von **t** hat das LGS

  (i) eine **eindeutige** Lösung?

  (ii) keine Lösung?

  (iii) unendlich viele Lösungen?

4.) Funktionen mit mehreren Variablen

a) Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4x^3 - 12xy - 24x + 6y^2 + 48$$

Bestimmen Sie Art und Lage der stationären Stellen von f.

b) Ermitteln Sie die sechs stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{4}y^4 - 2y^3 + \frac{5}{2}y^2$$

und untersuchen Sie diese Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Eine Berechnung der Funktionswerte soll nicht erfolgen!

c) Gegeben ist die Funktion $f(x,y) = x(x-a)^2 - 4(y+b)^2$

(i) Für welche Werte von a, b hat die Funktion f an der Stelle (1 / -3) ein lokales Extremum?

(ii) Von welcher Art und wie groß ist es?

5.) Rechnen mit Matrizen und Determinanten

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $A\cdot(2A-E)$ b) B^3 c) B^4

d) Det(A) e) $(B+E)^2$

6.) Funktionen mit einer Variablen

Gegeben ist folgende Funktion: $f_k(x) \quad = \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{8}k^2x^2 \quad mit\ k > 0$

Bestimmen Sie von dieser Funktion die **Ortskurve** der Wendepunkte.

7.) Summen

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

a) $$\sum_{k=1}^{100} k^2 - 4k + 2 \quad - \quad \sum_{k=0}^{102} 6k + 3$$

b) $$\sum_{k=12}^{50} 2k^3 - 4k^2 \quad + \quad \sum_{k=1}^{50} k - 3k^3$$

8.) Extrema unter Nebenbedingungen I

Berechnen Sie das Optimum der Funktion $f(x,y) \quad = \quad 3x^{0,3}y^{0,7}$

unter folgender Nebenbedingung: $1.000 \quad = \quad 2x + 5y$

9.) Optimum mit Nebenbedingungen II

Gegeben sei die Kostenfunktion $k(x,y) \quad = \quad 15x + 20y$

Das gewünschte Produktionsniveau beträgt: $4.000 \quad = \quad 8x^{0,75}y^{0,25}$

Bestimmen Sie das minimale Kostenkombination und die daraus resultierenden Gesamtkosten.

10.) Ableitungen

Bilden Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die ersten partiellen Ableitungen:

a) $$f(x,y,z) \quad = \quad \frac{\left(4y^2 - 3\right)^5}{x^6} + z^2$$

b) $$f(x,y,z) \quad = \quad e^{3x^4y^2} \cdot \left(y^3 - 8z\right) + 2xz$$