Klausur: Mathematik und Statistik

Lehrveranstaltung: Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Wirtschaft

Studiengang: BWL-Öffentliche Wirtschaft-Wirtschaftsförderung Datum: 27.01.2022

Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: WOW21A		**Semester:**	1		
Hilfsmittel: Wiss. TR & Formelsammlung				**Bearbeitungszeit: 60 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 60			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	.....			Signum:	
Anmerkungen:	***Bitte bearbeiten Sie nur 5 der 6 Aufgabenstellungen.*** ***<u>Bitte beachten:</u>*** ***Falls Sie bei allen Aufgaben eine Bearbeitung bzw. Teilbearbeitung durchgeführt haben, müssen Sie eine Aufgabe für die Bewertung streichen.*** ***Sollte die Annullierung einer Aufgabe von Ihrer Seite nicht erfolgen, dann kommen die Aufgaben 1 bis 5 in die Wertung!***				

Nr	Thema der Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
1	Matrizenrechnung: Rechentechnik	12		
2	Diff.-Rg I (mehrere Var.): Extrema ohne NB	12		
3	Diff.-Rg II (mehrere Var.): Extrema mit NB	12		
4	Ökonomische Anwendung zur Diff.-Rg. (1 Variable)	12		
5	Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung	12		
6	Matrizenrechnung: Leontief-Modell	12		
Summe		60		

(1) Rechentechnik zu Matrizen

Gegeben sind die Matrizen A und B: $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie die Ergebnisse der Ausdrücke

A^2-B^2 *und* $(A-B)\cdot(A+B)$

und erläutern Sie kurz, warum hier die 3. Binomische Formel nicht gilt.

Anmerkung:
Voraussetzung ist natürlich, dass Sie die Matrizenmultiplikation korrekt durchführen 😉

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \qquad A^2-B^2 \qquad und \qquad (A-B)\cdot(A+B)$$

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix} \qquad und$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$und \qquad A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & 7\end{pmatrix}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -9 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 14\\ -9 & 1\end{pmatrix}$$

$$(A-B)\cdot(A+B)=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ -3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 28\\ -3 & 7\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-6 & 14\\ -9 & 1\end{pmatrix}$$

b) Welche Matrix müsste man anstelle B verwenden, damit die 3. Binomische Formel hier gelten würde?
Bitte mit kurzer Begründung.

Es könnte die Einheitsmatrix E, die Inverse zu A (=> A^{-1}) oder die formattechnisch korrekte Nullmatrix N verwendet werden;
denn diese sind ein neutrales Element bzgl. der Multiplikation
und es gilt hier dann das Kommutativgesetz - daraus folgt:

=> A*E = E*A = A => A*N = N*A = N

=> $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$

(2) **Differentialrechnung I:** **Extrema ohne Nebenbedingung(en)**

Ermitteln Sie die **<u>beiden</u>** stationären Stellen der Funktion

$$f(x,y,z) = x^3 - 12x + 4y^2 - 8y + \frac{1}{8}z^2 - 4z + yz$$

und untersuchen Sie **<u>diese</u>** auf ihre Extremwerteigenschaft.

Berechnen Sie den Funktionswert nur ***bei <u>der</u> Extremwertstelle*** 😉

$$f(x,y,z) = x^3 - 12x + 4y^2 - 8y + \frac{1}{8}z^2 - 4z + yz$$

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 4$$

$$f_y(x,y,z) = 8y - 8 + z = 0 \quad \rightarrow \quad z = 8 - 8y$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{1}{4}z - 4 + y = 0 \quad \rightarrow \quad z = 16 - 4y$$

$$\rightarrow \quad y = -2 \quad \rightarrow \quad z = 24 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6\cdot(-2) & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-12) & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = (-12) < 0 \qquad \textit{indefinit}$$

$$\xrightarrow{\textit{Auswertung}} \quad D_2 = (-12)\cdot 8 - 0\cdot 0 = (-96) < 0 \qquad \textit{kein Extremum}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6\cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = 12 > 0 \qquad \textit{positiv definit}$$

$$\xrightarrow{\textit{Auswertung}} \quad D_2 = 12\cdot 8 - 0\cdot 0 = 96 > 0 \qquad \rightarrow$$

$$D_3 = 12\cdot 8\cdot 0,25 - 1\cdot 1\cdot 12 = 12 > 0 \qquad Min(2/-2/24) = -56$$

(3) **Differentialrechnung II:** **Extrema mit Nebenbedingungen**

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $f(x,y) = 8 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75}$

Eine Mengeneinheit für **x kostet 12,00 GE**, der Preis für eine Mengeneinheit von **y liegt bei 18,00 GE**.

Insgesamt steht ein Budget von **b = 4.800** GE zur Verfügung.

a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes.

b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Maximumfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden, wenn sich das Budget b um **10** GE erhöht?

$$L(x,y,\lambda) = 8 \cdot x^{0,25} \cdot y^{0,75} + \lambda(4.800 - 12x - 18y)$$

$$L_x(x,y,\lambda) = 2 \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} - 12\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{12} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \lambda$$

$$L_y(x,y,\lambda) = 6 \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} - 18\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{6}{18} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} = \lambda$$

$$\xrightarrow{Gleichsetzen} \quad \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} \quad \rightarrow \quad y = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot x \quad \rightarrow \quad y = 2x$$

$$\xrightarrow[in\ NB]{Austauschverhältnis} \quad 4.800 = 12x + 18 \cdot 2x \quad \rightarrow \quad 4.800 = 48x \quad \rightarrow \quad x = 100$$

$$\rightarrow \quad y = 2x \quad \rightarrow \quad y = 200$$

$$\rightarrow \quad f(100/200) = 8 \cdot 100^{0,25} \cdot 200^{0,75} = 1.345,43$$

$$\lambda = \frac{1}{6} \cdot \frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{200^{0,75}}{100^{0,75}} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{200}{100}\right)^{0,75} = \frac{1}{6} \cdot 2^{0,75} = 0,2803$$

$$\rightarrow \quad \lambda = 0,2803 \quad \xrightarrow{b=+10} \quad \Delta f = 0,2803 \cdot 10 \approx 2,803$$

$$f_{neu} \quad = \quad 1.345,43 + 2,803 \quad = \quad 1.348,233$$

(4) Ökonomische Anwendung zur Differentialrechnung mit einer Variablen

Der Unternehmer Kuno Storchenfuß agiert mit der Umsatz-Funktion

$$u(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x.$$

Die Gesamtkosten der Produktion belaufen sich nach eingehenden Analysen auf

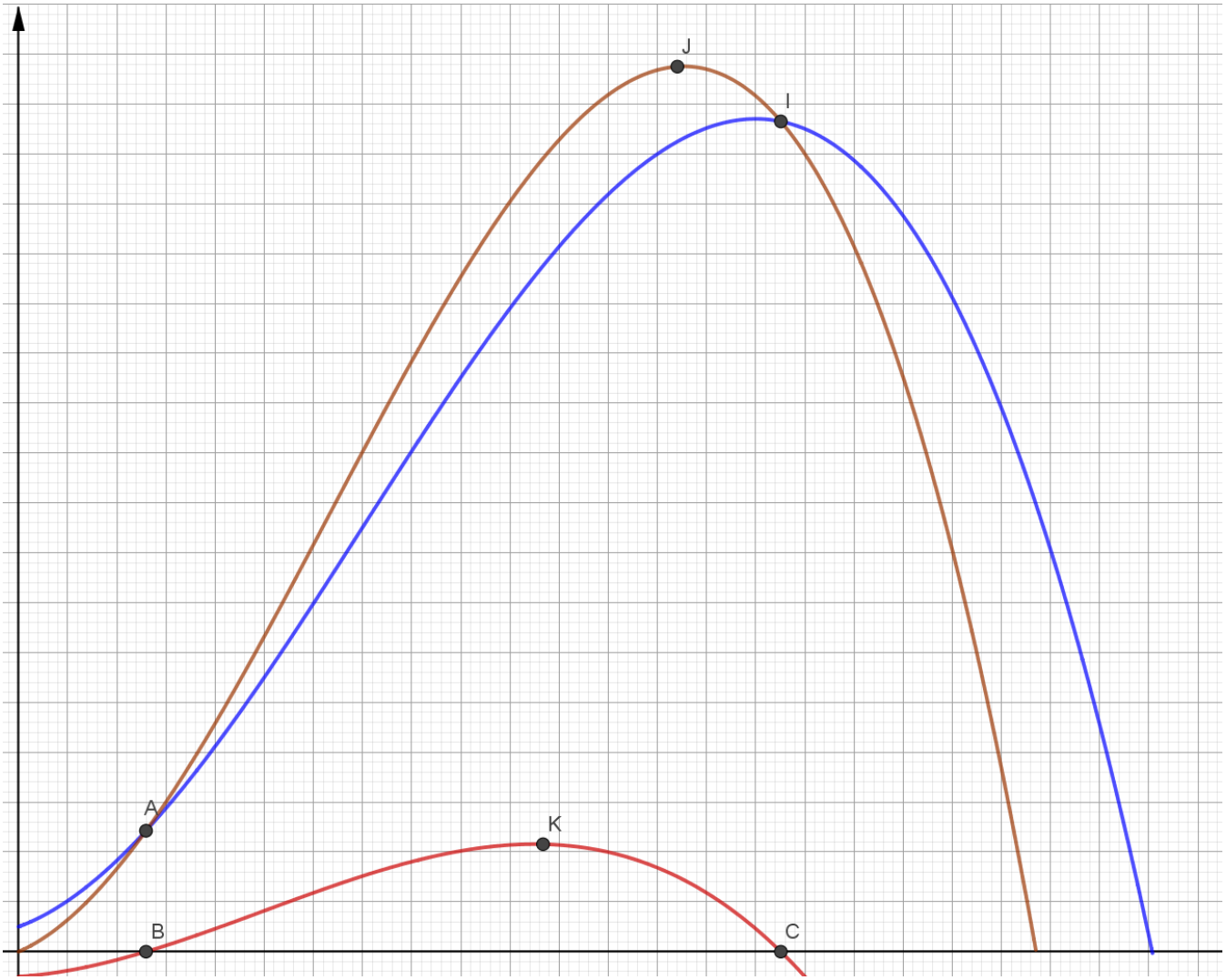
$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0\,;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

Die hergestellte Menge x wird auch komplett zur jeweiligen Preis-Absatz-Funktion p(x) abgesetzt.

⇨ beschriften Sie Skalen des Koordinatensystems und die drei Funktionen

⇨ berechnen Sie die Koordinaten der angezeigten Punkte und benennen Sie diese mit geeigneten Fachbegriffen



$$K_{ges}(x) = \left(\vec{k}_{ges}\right)^T \cdot \vec{m}_x + K_{fix}$$

$$\vec{m}_x = \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_{Def} \in [0\,;50] \quad \text{und} \quad \vec{k}_{ges} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K_{fix} = 1.000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000$$

$$K_{ges}(x) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64x \\ 8x^2 - 0{,}2x^3 \\ x^2 + 10x \end{pmatrix} + 1000 = 5 \cdot 64x + 10 \cdot 8x^2 - 10 \cdot 0{,}2x^3 + 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 10x + 1000$$

$$K_{ges}(x) = 320x + 80x^2 - 2x^3 + 4 \cdot x^2 + 40x + 1000 = -2x^3 + 84x^2 + 360x + 1000$$

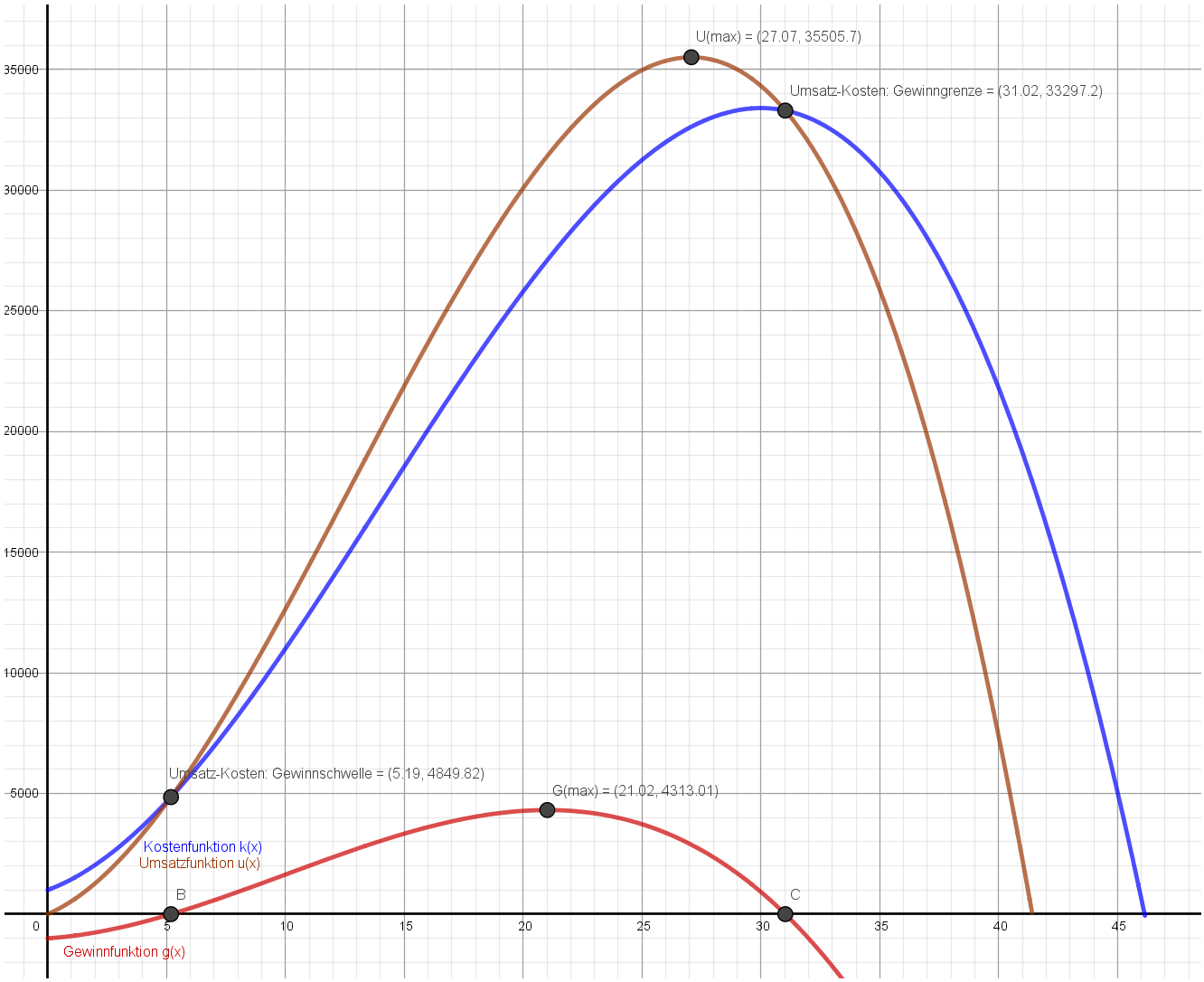
$$u(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x$$

Gewinnfunktion:

$$g(x) = u(x) - k(x)$$

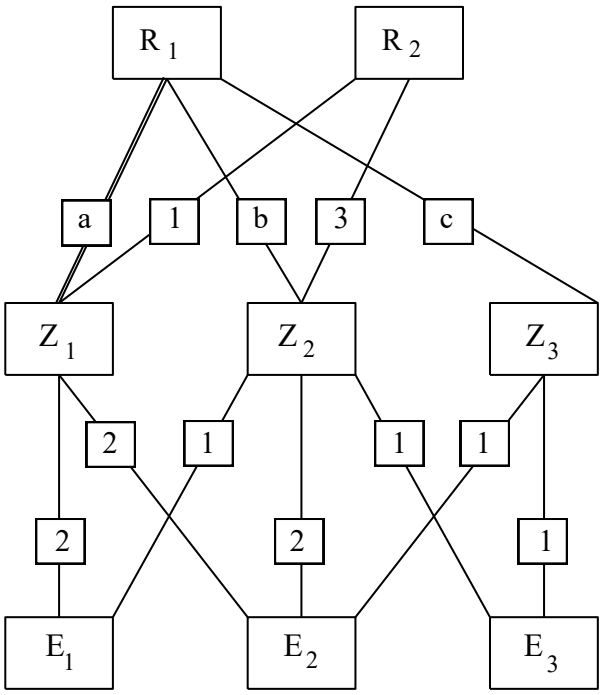
$$g(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x - \left(-2x^3 + 84x^2 + 360x + 1000\right)$$

$$g(x) = -3x^3 + 114x^2 + 424x + 2x^3 - 84x^2 - 360x - 1000 = -x^3 + 30x^2 + 64x - 1000$$



(5) Matrizenrechnung: Mehrstufige Produktion und Produktverflechtung

Ein Betrieb produziert aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist dem Gozintographen und der Tabelle zu entnehmen.



	E_1	E_2	E_3
R_1	5	10	5
R_2	5	8	3

a) Bestimmen Sie den **Verbrauch an Rohstoffen R_1** für je 1 ME der Zwischenprodukte, so dass **a, b und c positive ganze Zahlen** sind.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2a+2b+c & b+c \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{Koeffizientenvergleich}} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad 2a+b=5 \quad und \quad 2a+2b+c=10 \quad und \quad b+c=5 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Es ist folgender Vorrat an Zwischenprodukten vorhanden: $\vec{z} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.100 \\ 600 \end{pmatrix}$

Wie viele **Endprodukte E_1 und E_2** können hergestellt werden, wenn das Lager danach vollständig leer sein soll und von **E_3 200 ME hergestellt** werden müssen?

$$M_{ZE} \cdot \vec{e} = \vec{z} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.100 \\ 600 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{e} = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \\ 200 \end{pmatrix}$$

c) Gesucht ist jetzt die notwendige Mindestmenge an Zwischenprodukten, wenn eine Bestellung von Endprodukten im **Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3$ => 1 : 3 : 4** realisiert werden soll und **bereits 700 ME von Z_3** vorrätig sind.
Weitere Zukäufe von Z_3 sollen keine erfolgen.

$$M_{ZE} \cdot \vec{e} = \vec{z} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 700 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8x \\ 11x \\ 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 700 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow x = 100 \rightarrow \vec{z} = \begin{pmatrix} 8x \\ 11x \\ 7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1.100 \\ 700 \end{pmatrix}$$

d) 1 ME von R_1 kostet 2 GE, 1 ME von R_2 kostet 4 GE => $\vec{p}_R = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

Die Fertigung von **je 1 ME** der Zwischenprodukte aus den Rohstoffen und von **je 1 ME** der Endprodukte aus den Zwischenprodukten werden durch folgende Preis-Vektoren dargestellt:

$$\vec{p}_Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{p}_E = \begin{pmatrix} 10 & 32 & 12 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie **die Gesamtherstellungskosten für je 1 ME der Endprodukte**.

$$k_{gesamt} = \vec{p}_R \cdot M_{RE} \cdot \vec{e} + \vec{p}_Z \cdot M_{ZE} \cdot \vec{e} + \vec{p}_E \cdot \vec{e}$$

$$k_{gesamt} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 5 & 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 32 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k_{gesamt} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 54 = 104 + 32 + 54 = 190$$

(6) Matrizenrechnung: Leontief-Modell

Die Verflechtung dreier Werke A, B und C eines Chemieunternehmens untereinander und mit dem Markt wird durch das Leontief-Modell beschrieben.

Dabei gilt folgende Technologische Matrix T:

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ B & 0,3 & 0,25 & 0 \\ C & 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{array}\right)$$

a) Berechnen Sie die **Marktabgabe** $\vec{y}$ der Werke A, B und C, wenn **800 ME von A**, **520 ME von B** und **450 ME von C** produziert werden.

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,25 & 0 \\ 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,4 \\ -0,3 & 0,75 & 0 \\ -0,12 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 520 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 274 \\ 150 \\ 212 \end{pmatrix}$$

b) Erstellen Sie die zugehörige Input-Output-Tabelle bzw. füllen Sie die Vorlage aus:

	A	B	C	Konsum	Produktion
A	$\boxed{320}$	$\boxed{26}$	$\boxed{180}$	$y_1 = \boxed{274}$	$x_1 = \boxed{800}$
B	$\boxed{240}$	$\boxed{130}$	$\boxed{0}$	$y_2 = \boxed{150}$	$x_2 = \boxed{520}$
C	$\boxed{96}$	$\boxed{52}$	$\boxed{90}$	$y_3 = \boxed{212}$	$x_3 = \boxed{450}$

c) Für einen kommenden Zeitraum wird mit dem Marktvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$ gerechnet.

Bestimmen Sie den neuen zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,4 \\ 0,3 & 0,25 & 0 \\ 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} = \vec{x} \rightarrow \vec{y} = \vec{x} - T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{y} = (E - T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \quad \vec{y} \;=\; \begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,4 \\ -0,3 & 0,75 & 0 \\ -0,12 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 374 \\ 150 \\ 112 \end{pmatrix}$$

$$Lösung\ per\ LGS: \quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 900 \\ 560 \\ 345 \end{pmatrix}$$

$$Lösung\ per\ Leontief-Inverse: \quad \rightarrow \quad \vec{x} \;=\; (E-T)^{-1} \cdot \vec{y} \quad \rightarrow \quad \vec{x} \;=\; \begin{pmatrix} 900 \\ 560 \\ 345 \end{pmatrix}$$

d) Durch ein neues Produktionsverfahren ändern sich die **Koeffizienten a_{11} und a_{21}** der **Technologie-Matrix T**.
Außerdem soll die Produktion der Werke A, B und C auf das Verhältnis
$x_1 : x_2 : x_3 = 10 : 8 : 5$ umgestellt werden.

Der neue Marktvektor ist $\vec{y} \;=\; \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$

Ermitteln Sie die neue Technologie-Matrix T sowie den neuen Produktionsvektor $\vec{x}$.

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0,05 & 0,4 \\ a_{21} & 0,25 & 0 \\ 0,12 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot \vec{x} + \vec{y} \;=\; \vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y} \;=\; \vec{x} - T \cdot \vec{x} \;\rightarrow\; \vec{y} \;=\; (E-T) \cdot \vec{x}$$

$$\rightarrow \quad \vec{y} \;=\; \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -0,05 & -0,4 \\ -a_{21} & 0,75 & 0 \\ -0,12 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10x \\ 8x \\ 5x \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 549 \\ 297 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,3} \quad -1,2x - 0,8x + 4x = 180 \quad \rightarrow \quad 2x = 180 \quad \rightarrow \quad x = 90 \quad \rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 720 \\ 450 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Zeile\,2} \quad -900\,a_{21} + 540 + 0 = 297 \quad \rightarrow \quad a_{21} = \frac{243}{900} = 0,27$$

$$\xrightarrow{Zeile\,1} \quad (1-a_{11}) \cdot 900 - 36 - 180 = 549 \quad \rightarrow \quad 1 - a_{11} = \frac{765}{900} = 0,85 \quad \rightarrow \quad a_{11} = 0,15$$