

Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik

Studiengang: Integrated Engineering

Datum: 08.06.2026

Matrikelnummer:				Dozent: Jürgen Meisel
Kurs: TIE 24 EN	Semester:	4		
Hilfsmittel: <i>Wiss. TR und Formelsammlung</i>			Bearbeitungszeit: 90 min.	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 90		Erreichte Punktzahl:	
Prozente:			Signum:	
Anmerkungen:	Von 9 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.			

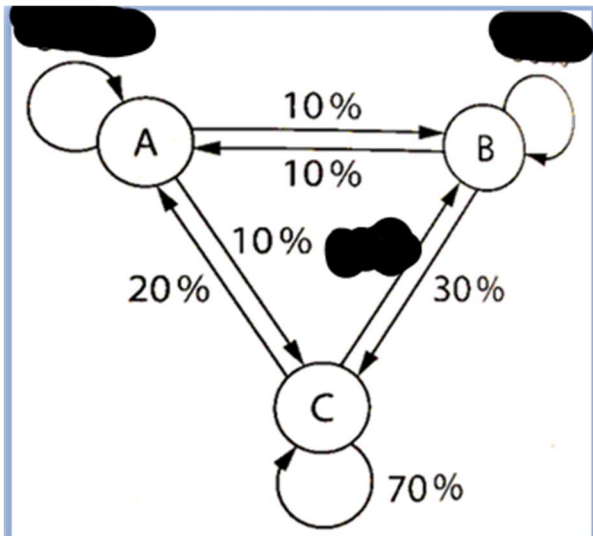
Aufgabennummer	maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
A 1: Stoch. Matrizen und stat. GG	15		
A 2: Diff.-Rg I (Extrema mit NB)	15		
A 3: Diff.-Rg II (Extrema ohne NB)	15		
A 4: Lineare Optimierung	15		
A 5: Statistik I - Mittelwerte & Streumaße (klassiert)	15		
A 6: Statistik II – Satz von Bayes und bed. W'keit	15		
A 7: Statistik III – Gini-Koeffizient & Lorenzkurve	15		
A 8: Statistik IV – Warenkorbmethode mit Preisindizes	15		
A 9: Statistik V – W'keiten mit Normalverteilung	15		
Summe	90		

Klausur OR-Methoden

(1) Matrizen und Vektoren: Stochastische Matrizen & Statisches Gleichgewicht

Ein E-Scooterleih mit den drei Filialen A, B und C verleiht tageweise E-Scooter, die morgens abgeholt und abends bei einer der drei Filialen wieder abgegeben werden (müssen).

Es wird angenommen, dass keiner der E-Scooter abhandenkommt, d.h. die im Umlauf befindliche Gesamtanzahl konstant bleibt.



Der Wechsel zwischen den Filialen ist im Übergangsdiagramm (teilweise) dargestellt.

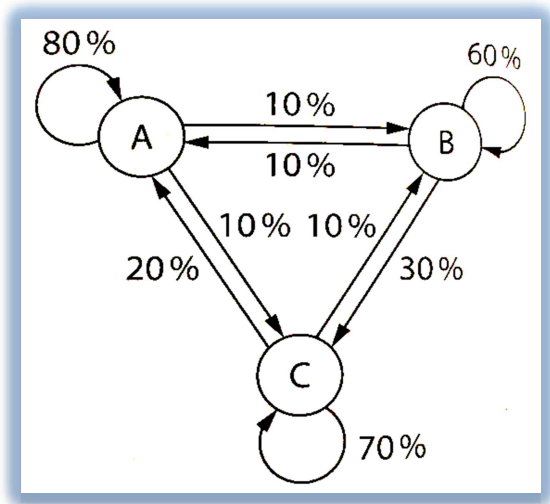
a) Vervollständigen Sie das Diagramm mit den fehlenden Werten entsprechend dem Sachzusammenhang und bilden Sie die zugehörige Übergangsmatrix.

Zu Saisonbeginn (1. März) starten alle Filialen mit je 100 E-Scootern.

- b) Berechnen Sie die Verteilung der folgenden beiden Tage.
- c) Zeigen Sie, dass es eine stabile Verteilung im Sinne eines stationären/statischen Gleichgewichts gibt und berechnen Sie dieses.
- d) Die Geschäftsführung möchte die 300 E-Scooter so auf die drei Filialen verteilt haben, dass abends immer die gleiche Anzahl von 100 E-Scootern in jeder Filiale vorhanden ist.

Aus Personalgründen kann die Verteilung nur von der Filiale A aus beeinflusst werden. Bestimmen Sie, diejenigen Übergangsquoten von A aus, mit denen eine stabile (dauerhafte) Gleichverteilung der E-Scooter auf alle Filialen zu erreichen ist.

Lösung:



$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 80 \\ 110 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 118 \\ 70 \\ 112 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 118 \\ 70 \\ 112 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123,8 \\ 65 \\ 111,2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 124 \\ 65 \\ 111 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot \vec{x} = \vec{x} \rightarrow (M - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,4 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & -0,3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\xrightarrow{\text{Summe}=1} \begin{pmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & -0,4 & 0,1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,20 \\ 0,35 \end{pmatrix}$$

$$M_A \cdot \vec{p} = \vec{p} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0,1 & 0,2 \\ b & 0,6 & 0,1 \\ 1-a-b & 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 100a + 30 &= 100 \rightarrow a = 0,7 \\ 100b + 70 &= 100 \rightarrow b = 0,3 \\ \text{Probe: } 0 + 30 + 70 &= 100 \end{aligned}$$

(2) Differentialrechnung I: Extrema mit Nebenbedingung

Gegeben sei folgende Produktionsfunktion: $q(x, y) = 10 \cdot x^{0,8} \cdot y^{0,2}$

Die Budgetrestriktion lautet: $b = 20x + 30y$

- a) Bestimmen Sie das optimale Produktionsprogramm mit Hilfe des Lagrangeansatzes in Abhängigkeit von b.

Anmerkung: Auf einen Nachweis des Maximums kann hier verzichtet werden!

- b) Zeigen Sie, dass der Wert von λ unabhängig von b ist und ermitteln Sie diesen Wert.
- c) Um welchen Wert würde sich das Produktionsergebnis im Optimum ändern, wenn das Budget b um **100 GE vermindert** würde?

Lösung:

$$L(x, y, \lambda) = 10 \cdot x^{0,8} \cdot y^{0,2} + \lambda(b - 20x - 30y)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x(x, y, \lambda) &= 8 \cdot \frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} - 20\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \cdot \frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} \\ L_y(x, y, \lambda) &= 2 \cdot \frac{x^{0,8}}{y^{0,8}} - 30\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{15} \cdot \frac{x^{0,8}}{y^{0,8}} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{in NB}} \begin{aligned} y &= \frac{1}{6}x \\ x &= \frac{1}{25}b \quad \wedge \quad y = \frac{1}{150}b \end{aligned}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \cdot \frac{y^{0,2}}{x^{0,2}} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}x\right)^{0,2} \cdot \frac{1}{x^{0,2}} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0,2} \cdot \frac{x^{0,2}}{x^{0,2}} = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0,2} \rightarrow \text{Behauptung}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0,2} \quad \wedge \quad \Delta b = -100$$

$$\text{es gilt: } \Delta q = \Delta b \cdot \lambda \rightarrow \Delta q = -100 \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{0,2} \rightarrow \Delta q \approx -40 \cdot 0,7 \approx -28$$

(3) Differentialrechnung II: Extrema ohne Nebenbedingungen

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f_t(x, y, z) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{1}{2}y^4 - 16y + \frac{1}{12}z^3 - t^2z \quad \text{mit } t > 0$$

- a) Zeigen Sie, dass (nur) zwei stationäre Stellen in Abhängigkeit von t vorliegen.
b) Prüfen Sie die stationären Stellen auf ihre Extremwerteigenschaft.

Anmerkung: Auf eine Berechnung der Funktionswerte kann hier verzichtet werden!

Lösung:

$$f_t(x, y, z) = \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{1}{2}y^4 - 16y + \frac{1}{12}z^3 - t^2z \quad \text{mit } t > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} f_t(x, y, z) = \frac{1}{2}x - 6 = 0 \rightarrow x = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} f_t(x, y, z) = 2y^3 - 16 = 0 \rightarrow y = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} f_t(x, y, z) = \frac{1}{4}z^2 - t^2 = 0 \rightarrow z^2 = 4t^2 \rightarrow |z| = \sqrt{4t^2} = 2t$$

$$\text{Stationäre Stellen: } S_1(12 \quad 2 \quad 2t \quad f_1) \quad S_2(12 \quad 2 \quad -2t \quad f_2)$$

$$\text{Hesse-Matrix: } H(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 6y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5z \end{pmatrix}$$

$$H_{S_1}(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f_{xx} = 0,5 > 0 \\ \det H_2 = 12 > 0 \\ \det H_3 = 12t > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{positiv definit} \\ \rightarrow \text{Minimum} \end{array}$$

$$H_{S_2}(f) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} \rightarrow \left. \begin{array}{l} f_{xx} = 0,5 > 0 \\ \det H_2 = 12 > 0 \\ \det H_3 = -12t < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{indefinit} \\ \rightarrow \text{kein Extremum} \end{array}$$

(4) Lineare Optimierung

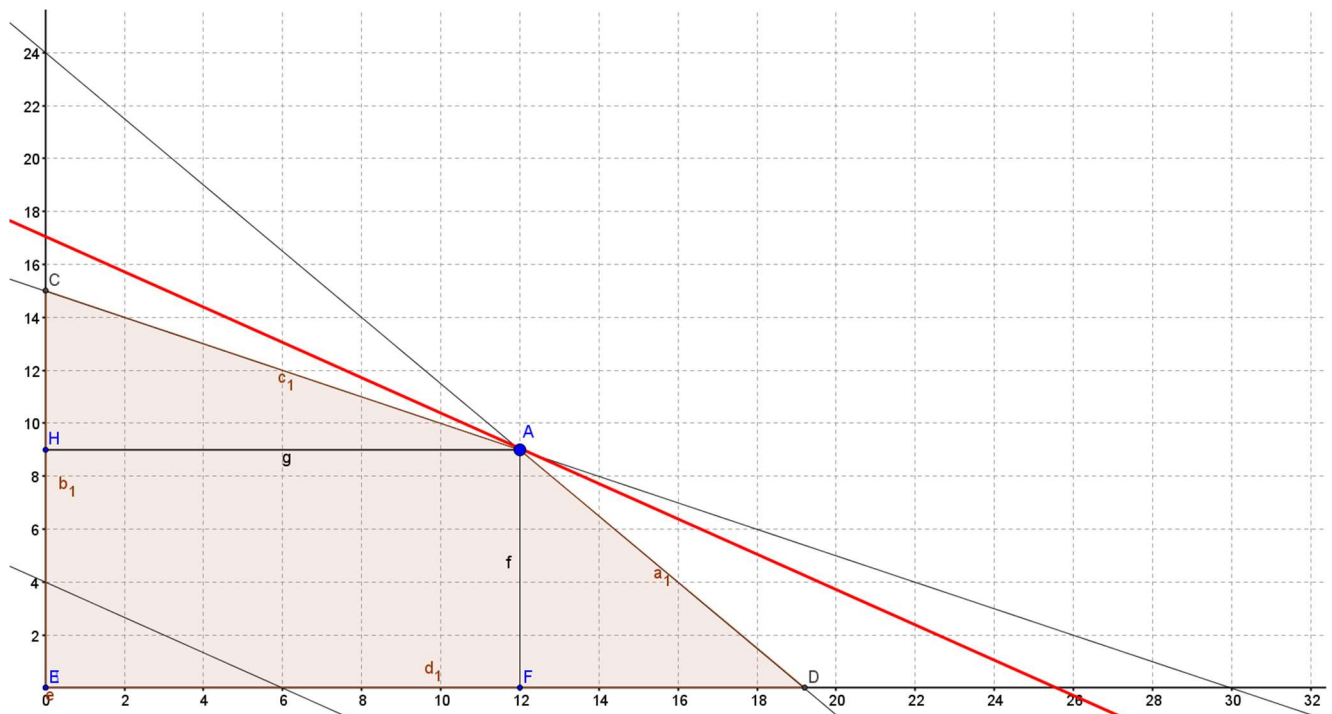
Im Betrieb Rasch & Ruh werden auf zwei Maschinen zwei Produkte P_1 und P_2 hergestellt. Die jeweilige Bearbeitungszeit, die Maschinenlaufzeit und die Verkaufspreise kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

	P_1	P_2	max. Maschinenlaufzeit
Maschine 1	15	30	450
Maschine 2	25	20	480
Verkaufspreis	40	60	

Wie viele Stücke müssen von P_1 und P_2 produziert werden, damit der Umsatz maximal wird?

Lösen Sie das Problem graphisch und per Simplexalgorithmus.

Lösung:



	x	y	u_1	u_2	b	$Umformung$
i	15	30	1	0	450	$i / 30$
ii	25	20	0	1	480	
ZF	40	60	0	0	G	
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{30}$	0	15	
ii	25	20	0	1	480	$ii - 20i$
ZF	40	60	0	0	G	$ZF - 60i$
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{30}$	0	15	
ii	15	0	$-\frac{2}{3}$	1	180	$ii / 15$
ZF	10	0	-2	0	$G - 900$	
i	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{30}$	0	15	$i - \frac{1}{2}ii$
ii	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{1}{15}$	12	
ZF	10	0	-2	0	$G - 900$	$ZF - 10ii$
i	0	1	$\frac{1}{18}$	$-\frac{1}{30}$	9	
ii	1	0	$-\frac{2}{45}$	$\frac{1}{15}$	12	
ZF	0	0	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$G - 1020$	

Lösung :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$G = 1020$

(5) Deskriptive Statistik I: Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße (klassiert)

Eine Umfrage unter 150 Schülern ergab folgende Verteilung des monatlichen Taschengeldes in €:

Klasse	$0 \leq x < 15$	$15 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x \leq 50$
rel. H.	0,2	0,3	0,4	0,1

- a) Füllen Sie die Tabelle anhand der Angaben korrekt aus.

Anlage: Tabelle zur Bearbeitung

Klasse	Abs. H'keit	Rel. H'keit	Kum. rel. H'keit	Klassenmitte	Klassenbreite	Häufigkeitsdichte
Summe						

- b) Ermitteln Sie das arithmetische Mittel.
c) Berechnen Sie die Varianz und die Standardabweichung.
d) Bestimmen Sie den Median, die beiden Quartilwerte und den Modus.
e) Wie viel Taschengeld geben die Eltern insgesamt monatlich aus?

Lösung:

Klasse	Abs. H'keit	Rel. H'keit	kum. Rel. H.	K-Mitte	K-Breite	HDI	K-M^2
[0 ; 15[	30	0,2	0,2	7,5	15	2	56,25
[15 ; 20[	45	0,3	0,5	17,5	5	9	306,25
[20 ; 30[	60	0,4	0,9	25	10	6	625
[30 ; 50]	15	0,1	1	40	20	0,75	1600
Summe	150	1	---	---	50	---	
n	150		Gesamtsumme TG: 3.112,50				150 * 20,75
Arithmetisches Mittel:		20,75	7,5*0,2+17,5*0,3+25*0,4+40*0,1				430,5625
Varianz:	82,5625	56,25*0,2+306,25*0,3+625*0,4+1600*0,1-430,5625					
StdAbw:	9,08639092						
Median:	20	ohne Berechnung möglich, da kom. Rel. Klasse => 0,5 beträgt.					
Quartil 1:	15,83	15+5*(0,25-0,2)/0,3			Quartil 3:	26,25	20+10*(0,75-0,5)/0,4
Modus:	mod. Klasse:	[15 ; 20[	Modus:	17,5			

(6) **Deskriptive Statistik II: Satz von Bayes**

Drei Fabriken produzieren Drohnen, um den Markt zu beliefern.

Fabrik A produziert 20 %,

50 % der Drohnen werden in Fabrik B und 30 % in Fabrik C hergestellt.

2 % der in Fabrik A produzierten Drohnen,

1 % der in Fabrik B produzierten Drohnen und 3 % der in Fabrik C produzierten Drohnen sind defekt.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, für eine einwandfrei funktionierende Drohne?

Auf dem Markt wird zufällig eine Drohne ausgewählt und nach Tests als defekt befunden.

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Drohne von Fabrik B hergestellt wurde?

c) Wie hoch darf die Fehlerquote von Fabrik C höchstens sein, damit die Wahrscheinlichkeit für eine zufällige ausgewählte funktionierende Drohne, die aus der Fabrik C stammen soll, bei mindestens 30 % liegt?

Lösung:

$$P(\text{einwandfrei}) = 0,2 \cdot 0,98 + 0,5 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot 0,97 = 0,982$$

$$P_{\text{defekt}}(B) = \frac{0,5 \cdot 0,01}{0,018} = \frac{5}{18} \approx 0,278$$

$$P_{\text{einwandfrei}}(C) = \frac{0,3 \cdot x}{0,2 \cdot 0,98 + 0,5 \cdot 0,99 + 0,3 \cdot x} = 0,3$$

$$\rightarrow x = 0,9871 \rightarrow \text{Fehlerquote} = 1 - 0,9871 = 0,0129 = 1,29[\%]$$

(7) Deskriptive Statistik III: Gini-Koeffizient und Lorenzkurve

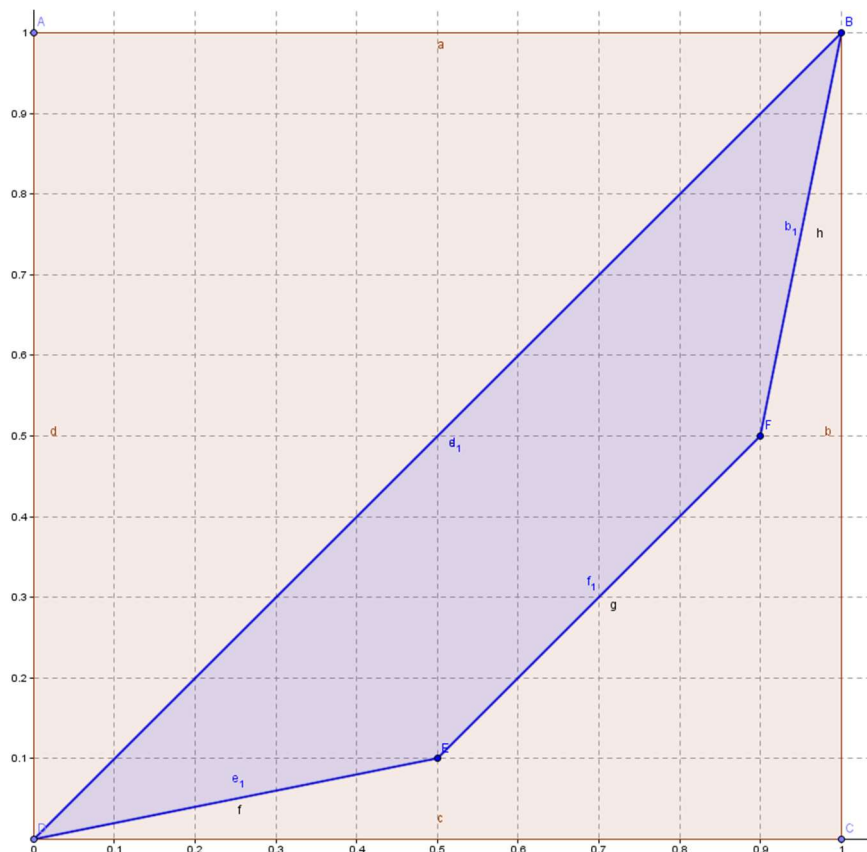
Bei einer Gruppe von 200 Personen besteht folgende Vermögensaufteilung:

- (1) Ein Vermögen von **jeweils 10 GE** haben 100 Personen;
- (2) Ein Vermögen von **je 50 GE** haben 80 Personen;
- (3) Die übrigen Personen besitzen **insgesamt 5000 GE** als Vermögen.

Zeichnen Sie die entsprechend dem Sachverhalt resultierende **Lorenzkurve** und prüfen Sie mittels **Gini-Koeffizient** den Grad der Vermögenskonzentration.

Lösung:

Personen				Vermögen			
Gruppe	Anzahl	rel. H'keit	kum.	pro Person	pro Gruppe	rel. H'keit	kum.
1	100	0,5	0,5	10	1000	0,1	0,1
2	80	0,4	0,9	50	4000	0,4	0,5
3	20	0,1	1		5000	0,5	1
Summe	200	1	x-Achse		10000	1	y-Achse



Gini-Koeffizient: $GK = 0,56$

Rechenweg:

Fläche 1: $0,5 \cdot 0,1 / 2 = 0,025$

Fläche 2: $0,5 \cdot (0,1 + 0,5) \cdot 0,4 = 0,12$

Fläche 3: $0,5 \cdot (0,5 + 1) \cdot 0,1 = 0,075$

Flächensumme: $0,22$

$$GK = \frac{0,5 - 0,22}{0,5} = \frac{0,28}{0,5} = 0,56$$

$$GK_{\text{normiert}} = 0,56 \cdot \frac{200}{199} = 0,562814$$

(8) Deskriptive Statistik IV: Warenkorb-Methode und Preisindexbestimmung

- a) Bestimmen Sie die Preisindizes **nach Laspeyres und Paasche** aufgrund der gegebenen Daten:

i	Ware	Menge im Basisjahr	Preis im Basisjahr	Menge im Berichtsjahr	Preis im Berichtsjahr
1	Tafel Schokolade	5	0,75 €	3	0,82 €
2	Flasche Apfelsaft	4	1,00 €	7	1,20 €
3	Kinobesuch	1	10,00 €	2	12,00 €
4	Flasche Rotwein	2	5,70 €	2	6,20 €

- b) Wie hoch ist die jährliche Inflationsrate auf der Grundlage der Daten **nach Laspeyres**, wenn das Basisjahr 2020 und das Berichtsjahr 2025 gelten?

Lösung:

Ware	Menge 2020	Preis 2020	Menge 2025	Preis 2025		
1	5	0,75 €	3	0,82 €		
2	4	1,00 €	7	1,20 €		
3	1	10,00 €	2	12,00 €		
4	2	5,70 €	2	6,20 €		
Laspeyres	Zähler	33,30	1,1423671		Inflation	
	Nenner	29,15			1,026978	2,70
Paasche	Zähler	47,26	1,1626076			
	Nenner	40,65				

(9) Statistik V – W'keiten mit Normalverteilung

Eine Maschine füllt Mehl in Säckchen ab. Sie ist auf ein Füllgewicht von 1006 Gramm eingestellt, die Standardabweichung beträgt 4 Gramm.

- Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten weniger als 1000 Gramm?
- Wie viel Prozent aller Säckchen enthalten zwischen 1000 g und 1010 Gramm?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht das Gewicht der Säckchen um mehr als 10 Gramm vom Erwartungswert ab?

Lösung:

$$P(X \leq 1000) = \Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{1000-1006}{4}\right) = \Phi_{\mu;\sigma}(-1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

$$\begin{aligned} P(1000 \leq X \leq 1010) &= \Phi_{\mu;\sigma}\left(\frac{1010-1006}{4}\right) - \Phi_{\mu;\sigma}(-1,5) = \Phi_{\mu;\sigma}(1) - \Phi_{\mu;\sigma}(-1,5) \\ &= 0,8413 - 0,0668 = 0,7745 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - P(996 \leq X \leq 1016) &= 1 - [\Phi_{\mu;\sigma}(2,5) - \Phi_{\mu;\sigma}(-2,5)] = 1 - [2 \cdot \Phi_{\mu;\sigma}(2,5) - 1] \\ &= 1 - [2 \cdot 0,9938 - 1] = 1 - 0,9876 = 0,0124 \end{aligned}$$