



Das Leontief - Modell

- Übungsaufgabe 1 -

Mathcad-Einstellung: Menü Extras --> Arbeitsblattoptionen --> **origin 1**

Übungsaufgabe 1:

Die drei Zweigwerke U, V und W eines Unternehmens sind nach dem Leontief-Modell miteinander verflochten.

Gegeben ist die Inputmatrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

- 1.1 Wieviele Mengeneinheiten (ME) müssen in den einzelnen Zweigwerken produziert werden, wenn mit einer **Nachfrage** von $\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$ gerechnet wird.

- 1.2 Zeichnen Sie für diese Produktion ein **Verflechtungsdiagramm** mit allen intern verbrauchten und an den Konsum gelieferten Mengen.

- 1.3 Für das kommende Jahr ist die **Produktion** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$ geplant.

Wie groß wird dann die Abgabe an den Konsum sein?

- 1.4 Es ist ein neues Produktionsverfahren geplant. Dadurch ändern sich die Elemente der Inputmatrix A. Die Lieferanteile aus den drei Zweigwerken an Zweigwerk U verdoppeln sich und die an V werden halbiert. Bei W entfällt der Eigenverbrauch. Zweigwerk W produziert 200 ME und Zweigwerk V doppelt soviel wie U.

Es wird die **Nachfrage** $\vec{y} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$ erwartet.

Bestimmen Sie die Lieferanteile der Zweigwerke U und V an Zweigwerk W sowie den Produktionsvektor.

1.1 Typ: Inputmatrix A und Nachfrage $\vec{y}$ gegeben $\Rightarrow$ gesucht Produktionsvektor $\vec{x}$

Grundgleichung für Verflechtungen: $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Einheitsmatrix:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inputmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Nachfrage:

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Produktionsvektor: $\vec{x}(x_1, x_2, x_3) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & 0.6 & -0.3 \\ -0.4 & -0.8 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Zu lösendes Gleichungssystem:

$$(E - A) \cdot \vec{x}(x_1, x_2, x_3) = \vec{y} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \cdot x_1 - \frac{1}{5} \cdot x_2 - \frac{1}{5} \cdot x_3 \\ \frac{3}{5} \cdot x_2 - \frac{3}{10} \cdot x_3 \\ -\frac{2}{5} \cdot x_1 - \frac{4}{5} \cdot x_2 + \frac{4}{5} \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix aufstellen:

$$G := \text{erweitern}(E - A, \vec{y}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 12 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{3}{10} & 18 \\ -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & 40 \end{pmatrix}$$

In Diagonalform bringen:

$$G_{\text{diag}} := \text{zref}(G) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 132 \\ 0 & 1 & 0 & 176 \\ 0 & 0 & 1 & 292 \end{pmatrix}$$

Lösungsvektor abrufen:

$$\vec{x} := G_{\text{diag}}^{\langle 4 \rangle} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 132 \\ 176 \\ 292 \end{pmatrix}$$

1.2 Typ: Inputmatrix A, Nachfrage y und Produktion x gegeben $\Rightarrow$ Warenflusstabelle

Die Zahlen im Diagramm errechnen sich durch zeilenweises multiplizieren $A \cdot x$.

► Verflechtung

$$\text{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Zweigwerke"} & \text{"U"} & \text{"V"} & \text{"W"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"U"} & 26.4 & 35.2 & 58.4 & 12 & 132 \\ \text{"V"} & 0 & 70.4 & 87.6 & 18 & 176 \\ \text{"W"} & 52.8 & 140.8 & 58.4 & 40 & 292 \end{pmatrix}$$

► Lieferungen

Eigenbedarf_U = 26.4

Lieferung_UV = 35.2

Lieferung_UW = 58.4

Lieferung_VU = 0

Eigenbedarf_V = 70.4

Lieferung_VW = 87.6

Lieferung_WU = 52.8

Lieferung_WV = 140.8

Eigenbedarf_W = 58.4

Produktion_U = 132

Konsum_U = 12

Produktion_V = 176

Konsum_V = 18

Produktion_W = 292

Konsum_W = 40

1.3 Typ: Inputmatrix M und neue Produktion x1 gegeben $\Rightarrow$ gesucht neuer Konsumvektor y1

$$x1 := \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$y1 := (E - A) \cdot x1$$

$$y1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4 Typ: Neue Inputmatrix M2 und neuer Konsumvektor y2 gegeben $\Rightarrow$ gesucht neue Lieferanteile der Zweigwerke x2.

$$\text{Alte Inputmatrix: } A \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$y2 := \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Bedingungen:

Verdoppelung:

$$a_{11} := 2 \cdot (A^{(1)})_1$$

$$a_{21} := 2 \cdot (A^{(1)})_2$$

$$a_{31} := 2 \cdot (A^{(1)})_3$$

Halbierung:

$$a_{12} := \frac{1}{2} \cdot (A^{(2)})_1$$

$$a_{22} := \frac{1}{2} \cdot (A^{(2)})_2$$

$$a_{32} := \frac{1}{2} \cdot (A^{(2)})_3$$

a_{13} nicht bekannt

a_{23} nicht bekannt

$$a_{33} := 0$$

Neue Inputmatrix:

$$A2(a_{13}, a_{23}) := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Konkret:

$$A2(a_{13}, a_{23}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & a_{13} \\ 0 & \frac{1}{5} & a_{23} \\ \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Produktion von Zweigwerk U :

$$x_1$$

alt:

neu:

Produktion von Zweigwerk V:

$$x_2(x_1) := 2 \cdot x_1$$

$$y = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$y2 := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Produktion von Zweigwerk W:

$$x_3 := 200$$

Es gibt ein neues Gleichungssystem:

$$(E - A2(a_{13}, a_{23})) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 \cdot x_1 \\ 200 \end{pmatrix} = y2 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \cdot x_1 - 200 \cdot a_{13} \\ \frac{8}{5} \cdot x_1 - 200 \cdot a_{23} \\ -\frac{8}{5} \cdot x_1 + 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Auflösen:

$$x_1 := \frac{-8}{5} \cdot x_1 + 200 = 24 \text{ auflösen, } x_1 \rightarrow 110$$

$$x_1 = 110$$

$$a_{23} := \left(\frac{8}{5} \cdot x_1 - 200 \cdot a_{23} \right) = 18 \text{ auflösen, } a_{23} \rightarrow \frac{79}{100}$$

$$a_{23} = 0.79$$

$$a_{13} := \frac{2}{5} \cdot x_1 - 200 \cdot a_{13} = 12 \text{ auflösen, } a_{13} \rightarrow \frac{4}{25}$$

$$a_{13} = 0.16$$

► Lieferung

$$\text{Lieferung}_{UW} = 0.16$$

$$\text{Lieferung}_{VW} = 0.79$$