Klausur Wirtschaftsmathematik

Fakultät für Technik

Studiengang: Integrated Engineering Datum: 06.12.2021

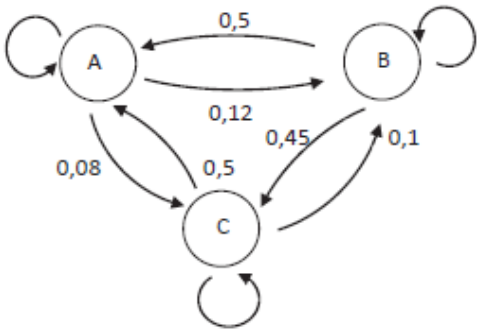
Matrikelnummer:				**Dozent: Jürgen Meisel**	
Kurs: TIE 19 EN2		**Semester:**	4		
Hilfsmittel: ***Wiss. TR (nicht programmierbar) und Formelsammlung***				**Bearbeitungszeit: 90 min.**	
Bewertung:	Maximale Punktzahl: 90			Erreichte Punktzahl:	
Prozente:	.....			Signum:	
Anmerkungen:	***Von 7 gestellten Aufgaben müssen 6 ausgewählt und bearbeitet werden.***				

Aufgabennummer		maximale Punkte	erreichte Punkte	Bemerkungen
A 1: **Übergangsmatrizen und stat. Gleichgewicht**		**15**		
A 2: **Leontief-Modell**		**15**		
A 3: **Diff.-Rg I (Extrema ohne NB)**		**15**		
A 4: **Diff.-Rg II (Extrema mit NB)**		**15**		
A 5: **Dynamische Investitionsrechnung (C_0-Methode/Interner ZF)**		**15**		
A 6: **Statistik I** **Mittelwerte & Streumaße; Lorenzkurve & Gini-Koeffizient**		**15**		
A 7: **Statistik II** **Korrelation & Regression**		**15**		
Summe		**90**		

Klausur QR-Methoden (06.12.2021)

(1) Matrizen und Vektoren: Übergangsmatrizen & Statisches Gleichgewicht

In Mannheim soll ein Rent-Elektro-Car-System mit drei Stationen eingerichtet werden. A (Bahnhof), B (Paradeplatz) und C (Planetarium); hier werden jeweils morgens zur Öffnungszeit 80, 10 bzw. 30 Cars bereitgestellt. Abends befinden sich die Elektromobile wieder an einer der drei Stationen – die Wahrscheinlichkeiten hierfür sind durch nachfolgenden – leider unvollständigen - Gozintographen dargestellt:



a) Bilden Sie die Übergangsmatrix und den Verteilungsvektor.

b) Wie ist die Verteilung am Abend des **<u>zweiten</u>** Tages, wenn man annimmt, dass nachts keine Elektro-Cars zwischen den hin und her bewegt werden?

c) Auf lange Sicht rechnet man, dass am Bahnhof immer 45 % der Cars vorrätig sein sollten. Wird dies durch den Übergangsprozess garantiert oder muss hierzu manuell nachts korrigiert werden?

Lösung:

$$U = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,50 & 0,50 \\ 0,12 & 0,05 & 0,10 \\ 0,08 & 0,45 & 0,40 \end{pmatrix} \qquad \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = U \cdot \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,50 & 0,50 \\ 0,12 & 0,05 & 0,10 \\ 0,08 & 0,45 & 0,40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84,0 \\ 13,1 \\ 22,9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_3 = U \cdot \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,50 & 0,50 \\ 0,12 & 0,05 & 0,10 \\ 0,08 & 0,45 & 0,40 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 84,0 \\ 13,1 \\ 22,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85,200 \\ 13,025 \\ 21,775 \end{pmatrix}$$

$$(U - E) \cdot \vec{x} = \vec{0} \rightarrow \begin{pmatrix} -0,20 & 0,50 & 0,50 \\ 0,12 & -0,95 & 0,10 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{147} \begin{pmatrix} 105 \\ 16 \\ 26 \end{pmatrix}$$

#17: $\begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0.5 \\ 0.12 & -0.95 & 0.1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

#18: $0.12 \cdot x - 0.95 \cdot y + 0.1 \cdot z = 0 \wedge 0.2 \cdot x - 0.5 \cdot y - 0.5 \cdot z = 0 \wedge x + y + z = 1$

#19: SOLVE(0.12·x − 0.95·y + 0.1·z = 0 ∧ 0.2·x − 0.5·y − 0.5·z = 0 ∧ x + y + z = 1, [x, y, z])

#20: $x = \frac{5}{7} \wedge y = \frac{16}{147} \wedge z = \frac{26}{147}$

Am Bahnhof würden langfristig ca. 71,4 % der Cars vorrätig sein. Daher muss nicht korrigiert werden.

(2) Leontief-Modell

Die drei Zweigwerke (**U)**mmel, (**V)**ogel und (**W)**erklage eines Unternehmens sind durch gegenseitigen Austausch nach dem Leontief-Modell miteinander verbunden.

Die Inputmatrix T hat dabei folgende Form:

$$T = \left(\begin{array}{c|ccc} & U & V & W \\ \hline U & 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ V & 0 & 0,4 & 0,3 \\ W & 0,4 & 0,8 & 0,2 \end{array}\right)$$

a) Wie viele Mengeneinheiten müssen in den jeweiligen Zweigwerken produziert werden, wenn mit einer externen Nachfrage von $\vec{y} = (12 \quad 18 \quad 40)^T$ kalkuliert wird?

b) Ermitteln Sie nun die Input-Output-Tabelle/Übersicht bzw. Input-Matrix A.

c) Für die nächste Saison ist eine Gesamtproduktion von $\vec{x} = (100 \quad 50 \quad 100)^T$ geplant. Welche Mengen werden an den Konsum abgegeben?

Es ist ein neues Produktionsverfahren geplant, mit dem sich die Elemente der Inputmatrix T ändern.
Die Lieferanteile aus den drei Zweigwerken an Ummel (Spalte 1) verdoppeln sich und
die Anteile an Vogel (Spalte 2) halbieren sich.
Werklage hat nun keinen Eigenverbrauch mehr.

Die Gesamtproduktion $\vec{x}$ verhält sich wie folgt:
Werklage produziert 200 ME, Zweigwerk **V**ogel stellt doppelt so viel wie **U**mmel her.

Es wird eine externe Nachfrage von $\vec{y} = (12 \quad 18 \quad 24)^T$ erwartet.

d) Wie hoch ist der neue Produktionsvektor $\vec{x}$ und wie groß sind die Lieferanteile der Zweigwerke **U**mmel und **V**ogel an das Werk **W**erklage (=> Spalte 3)?

Lösung:

$$\vec{x} = (E-T)^{-1}\cdot\vec{y} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,2 \\ 0 & 0,6 & -0,3 \\ -0,4 & -0,8 & 0,8 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{8}{3} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{14}{3} & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 132 \\ 176 \\ 292 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\vec{x}=\begin{pmatrix} 132 \\ 176 \\ 292 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{x_{11}}{132}=0,2 & \frac{x_{12}}{176}=0,2 & \frac{x_{13}}{292}=0,2 \\ 0 & \frac{x_{22}}{176}=0,4 & \frac{x_{23}}{292}=0,3 \\ \frac{x_{31}}{132}=0,4 & \frac{x_{32}}{176}=0,8 & \frac{x_{33}}{292}=0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26,4 & 35,2 & 58,4 \\ 0 & 70,4 & 87,6 \\ 52,8 & 140,8 & 58,4 \end{pmatrix} = A$$

Gesamt-Verflechtung

Output →

Input	U	V	W	*Markt* y_i	*Gesamt* x_i
U	26,4	35,2	58,4	12	132
V	0	70,4	87,6	18	176
W	52,8	140,8	58,4	40	292

$$(E-T)\cdot\vec{x} = \vec{y} \rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 0,8 & -0,2 & -0,2 \\ 0 & 0,6 & -0,3 \\ -0,4 & -0,8 & 0,8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neue Technologiematrix und neue Gesamtproduktion:

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & x_{13} \\ 0 & 0,2 & x_{23} \\ 0,8 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x}_{neu} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 200 \end{pmatrix} \quad mit \quad \vec{y}_{neu} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$(E-T)\cdot\vec{x} = \vec{y} \rightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & -0,1 & -x_{13} \\ 0 & 0,8 & -x_{23} \\ -0,8 & -0,4 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 200 \end{pmatrix} \xrightarrow{Zeile\,3} \begin{matrix} 24 = -1,6k + 200 \\ k = 110 \end{matrix}$$

$$Zeile\,1: \xrightarrow{k=110} 12 = 66 - 22 - 200x_{13} \rightarrow 32 = 200x_{13} \rightarrow x_{13} = 0,16$$

$$Zeile\,2: \xrightarrow{k=110} 18 = 0 + 176 - 200x_{23} \rightarrow 158 = 200x_{23} \rightarrow x_{23} = 0,79$$

Ergebnis:

$$T_{neu} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,16 \\ 0 & 0,2 & 0,79 \\ 0,8 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \quad und \quad \vec{x}_{neu} = \begin{pmatrix} 110 \\ 220 \\ 200 \end{pmatrix} \quad mit \quad \vec{y}_{neu} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(3) Differentialrechnung I: Extrema ohne Nebenbedingungen

Eine Ackerfläche wird mit Getreide bestellt. Zuvor wird Kunstdünger der Sorte S_1 in x Mengeneinheiten, der Sorte S_2 in y Mengeneinheiten und der Sorte S_3 in z Mengeneinheiten ausgestreut. Aus langjähriger Erfahrung weiß der Landwirt, dass der Ertrag in Abhängigkeit der Düngung durch folgende Funktion wiedergegeben wird:

$$f(x,y,z) = 490+2x+2y-\frac{9}{2}x^2-y^2-\frac{1}{2}z^2+3xy+2xz$$

Wie muss der Landwirt den Acker düngen, damit er einen maximalen Ertrag erzielt?
Wie hoch ist der maximal erreichbare Ertrag?

Zeigen Sie auch, dass Ihre Lösung ein Maximum darstellt.

Lösung:

$$f_x(x,y,z) = 2-9x+3y+2z = 0 \qquad f_y(x,y,z) = 2-2y+3x = 0 \rightarrow y = 1+\frac{3}{2}x$$

$$f_z(x,y,z) = -z+2x = 0 \rightarrow z = 2x$$

$$f_x(x,y,z) = 2-9x+3y+2z = 0 \xrightarrow{y \text{ und } z \text{ einsetzen}}$$

$$2-9x+3\cdot\left(1+\frac{3}{2}x\right)+2\cdot 2x=0 \rightarrow 2-9x+3+\frac{9}{2}x+4x=0 \rightarrow x=10 \rightarrow y=16 \rightarrow z=20$$

$$\Rightarrow S(10 \mid 16 \mid 20 \mid f(10/16/20)=516)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} Det(H_1)=-9<0 \\ Det(H_2)=18-9=9>0 \\ Det(H_3)=-1<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} negativ\ definit \\ \rightarrow Maximum \end{cases}$$

$$NR: \quad Det(H_3)=-18+0+0-(-8)-0-(-9)=-18+8+9=-1<0$$

(4) Differentialrechnung II: Extrema mit Nebenbedingung

Bei einer Ein-Produktunternehmung liegt folgende Produktionsfunktion vor: $f(x,y) = 40\cdot x^{0,25}\cdot y^{0,75}$

wobei x und y die ME der beiden eingesetzten Produktionsfaktoren q_1 und q_2 darstellen.
Die Faktorpreise für jeweils eine ME der beiden Produktionsfaktoren betragen q_1 = 3 GE und q_2 = 8 GE.

Das Unternehmen möchte einen Auftrag im Umfang $f(x,y)$ von 140 ME erfüllen und dabei die Kosten minimieren.

a) Lösen Sie das Problem mittels Lagrangemethode.
b) Welchen Wert besitzt der Lagrangeparameter im Minimalfall und welche ökonomische Aussage kann hier getroffen werden.

Anmerkung: Auf einen Nachweis des Minimums kann hier verzichtet werden!

Lösung:

$$L(x,y,\lambda) = 3x+8y+\lambda\left(140-40\cdot x^{0,25}\cdot y^{0,75}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} L_x(x,y,\lambda) = 3-10\lambda\cdot\frac{y^{0,75}}{x^{0,75}} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{3}{10}\cdot\frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} \\ L_y(x,y,\lambda) = 8-30\lambda\cdot\frac{x^{0,25}}{y^{0,25}} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{4}{15}\cdot\frac{y^{0,25}}{x^{0,25}} \end{matrix}\right\} \frac{3}{10}\cdot\frac{x^{0,75}}{y^{0,75}} = \frac{4}{15}\cdot\frac{y^{0,25}}{x^{0,25}}$$

$$\rightarrow Austauschverhältnis: \quad y=\frac{9}{8}\cdot x \xrightarrow{y=\frac{9}{8}\cdot x \text{ in } NB} 140 = 40\cdot x^{0,25}\cdot\left(\frac{9}{8}\cdot x\right)^{0,75}$$

$$\rightarrow x=3,204 \quad und \quad y=3,605 \quad und \quad f(3,204/3,605)=38,4\,[Kosten]$$

$$Lagrangeparameter: \rightarrow \lambda = \frac{3}{10}\cdot\left(\frac{3,204}{3,605}\right)^{0,75} = 0,2746$$

Eine Änderung der Produktion um k ME führt zu einer Kostenänderung von k * 0,2746 [GE]

(5) Dynamische Investitionsrechnung: Kapitalwertmethode & Interner Zinsfuß

Sie arbeiten in der Controllingabteilung der Knacknuss-GmbH. Die Geschäftsleitung steht vor der Auswahl eines Investitionsvorhabens, dabei stehen zwei Maschinen (Invest1 und Invest2) in der engeren Auswahl.
Ihre Aufgabe als Controller ist es, die vorhandenen Informationen entsprechend zu verarbeiten und somit die Geschäftsführung bei der Auswahlentscheidung zu unterstützen. Ihnen stehen folgende Informationen bzgl. der Zahlungsfolgen der Investitionen zur Verfügung:

	Investitionsobjekt I	**Investitionsobjekt II**
Anschaffungswert	98.000,00 €	98.000,00 €
Liquidationserlös	6.000,00 €	8.000,00 €
Nutzungsdauer	6 Jahre	6 Jahre
Überschüsse		
Jahr 1	18.000,00 €	23.000,00 €
Jahr 2	22.000,00 €	25.000,00 €
Jahr 3	20.000,00 €	23.000,00 €
Jahr 4	26.000,00 €	23.000,00 €
Jahr 5	25.000,00 €	21.000,00 €
Jahr 6	24.000,00 €	20.000,00 €

a) Ermitteln Sie welches Investitionsobjekt zu einem Kalkulationssatz von 10 % das vorteilhaftere ist, wenn nach 6 Jahren die Liquidation stattfindet.
b) Wie hoch müsste der Liquidationserlös für Investitionsobjekt I sein, damit die Investitionsentscheidung zwischen I und II indifferent wird?
c) Wie hoch ist der Interne Zinsfuß von Investitionsobjekt I?

Lösung:

$$C_{0;I} = \left(-98+\frac{18}{1{,}1}+\frac{22}{1{,}1^2}+\frac{20}{1{,}1^3}+\frac{26}{1{,}1^4}+\frac{25}{1{,}1^5}+\frac{30}{1{,}1^6}\right)\cdot 10^3 = 1.787{,}35$$

$$C_{0;II} = \left(-98+\frac{23}{1{,}1}+\frac{25}{1{,}1^2}+\frac{23}{1{,}1^3}+\frac{23}{1{,}1^4}+\frac{21}{1{,}1^5}+\frac{28}{1{,}1^6}\right)\cdot 10^3 = 5.404{,}42$$

Beide Investitionsprojekte sind rentabel, allerdings ist Projekt II besser als Projekt I wegen des höheren Kapitalwerts.

$Ansatz\ 1:$

$$C_{0;II} = C_{0;I}+\frac{x}{1{,}1^6} \rightarrow 5.404{,}42 = 1.787{,}35+\frac{x}{1{,}1^6} \rightarrow x = 3.617{,}07\cdot 1{,}1^6 = 6.407{,}86$$

$$\xrightarrow[Liquidationserlös]{neuer} Liqu_{neu} = 6.000{,}00+6.407{,}86 = 12.407{,}86$$

$Oder\ Ansatz\ 2:$

$$C_{0;I} = \left(-98+\frac{18}{1{,}1}+\frac{22}{1{,}1^2}+\frac{20}{1{,}1^3}+\frac{26}{1{,}1^4}+\frac{25}{1{,}1^5}+\frac{x}{1{,}1^6}\right)\cdot 10^3 \overset{!}{\underset{C_{0;II}}{=}} 5.404{,}42 \rightarrow x = 36.407{,}86 \xrightarrow{-24.000} Liqu_{neu} = 12.407{,}86$$

Interner Zinsfuß von Projekt I:

$$0 = -98+\frac{18}{q}+\frac{22}{q^2}+\frac{20}{q^3}+\frac{26}{q^4}+\frac{25}{q^5}+\frac{30}{q^6} \xrightarrow{\cdot q^6} 0 = -98q^6+18q^5+22q^4+20q^3+26q^2+25q+30$$

$$\rightarrow q = 1{,}10573 \rightarrow i = 0{,}10573 \rightarrow p = 10{,}573[\%]$$

(6) Deskriptive Statistik I:
Häufigkeitsverteilung / Mittelwerte / Streumaße / Konzentrationsprozess

Im Frachthafen Mannheim werden im Laufe eines Monats mehrere Frachtschiffe beladen. Die Größe der Schiffe wird durch ihre Ladekapazität (in Tonnen) angegeben.

Im Laufe des Monats Mai werden die in der Tabelle angegebenen Werte ermittelt, wobei eine Klasseneinteilung gewählt wird.

Nehmen Sie Gleichverteilung in den einzelnen Klassen an.

Gewicht (to)	**absolute Häufigkeit**	**relative Häufigkeit**	**Klassen-mitte**	**Klassen-breite**	**Häufigkeits-dichte**	**kum. rel. Häufigkeit**
[0 ; 500[	**30**					
[500 ; 1.000[	**60**					
[1.000 ; 2.000[	**70**					
[2.000 ; 3.000[	**30**					
[3.000 ; 5.000[	**10**					
Summe						

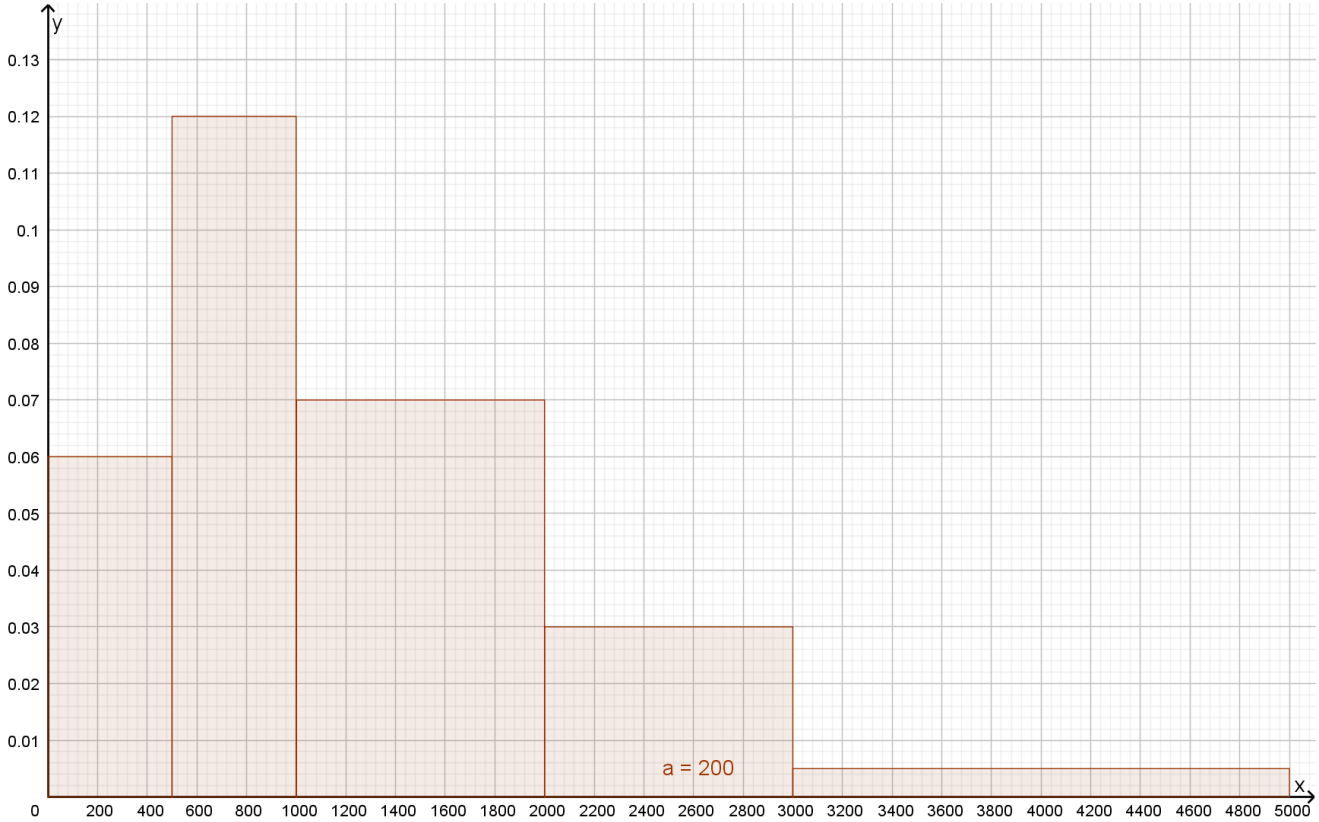
a) Vervollständigen Sie die Tabelle.
b) Zeichnen Sie das zugehörige Histogramm.
c) Bestimmen Sie den arithmetischen Mittelwert, die modale Klasse und den Modalwert.
d) Bestimmen Sie den Median, das untere Quartil und das obere Quartil.
e) Zeichnen Sie nun noch die Lorenzkurve und berechnen Sie den zugehörigen Ginikoeffizienten.
Beurteilen Sie auch kurz Ihr Ergebnis.

Lösung:

Gewicht (to)	absolute Häufig.	relative Häufig.	Klassen-mitte	Klassen-breite	Häufigkeits-dichte	kum. rel. Häufig.
[0 ; 500[	30	**0,15**	**250**	**500**	**0,06**	**0,15**
[500 ; 1.000[	60	**0,30**	**750**	**500**	**0,12**	**0,45**
[1.000 ; 2.000[	70	**0,35**	**1.500**	**1.000**	**0,07**	**0,80**
[2.000 ; 3.000[	30	**0,15**	**2.500**	**1.000**	**0,03**	**0,95**
[3.000 ; 5.000[	10	**0,05**	**4.000**	**2.000**	**0,005**	**1,00**
Summe	**200**	**1,00**	**---**	**---**	**---**	**---**

$$\bar{x} = 250 \cdot 0{,}15 + 750 \cdot 0{,}3 + 1.500 \cdot 0{,}35 + 2.500 \cdot 0{,}15 + 4.000 \cdot 0{,}05 = 1.362{,}5$$

$$\textit{Modale Klasse}: \ [500\,;1.000] \ \textit{wegen } HD_{\max} = 0{,}12 \ \rightarrow \ \textit{Modalwert}: \overline{x_{Mod}} = 750$$

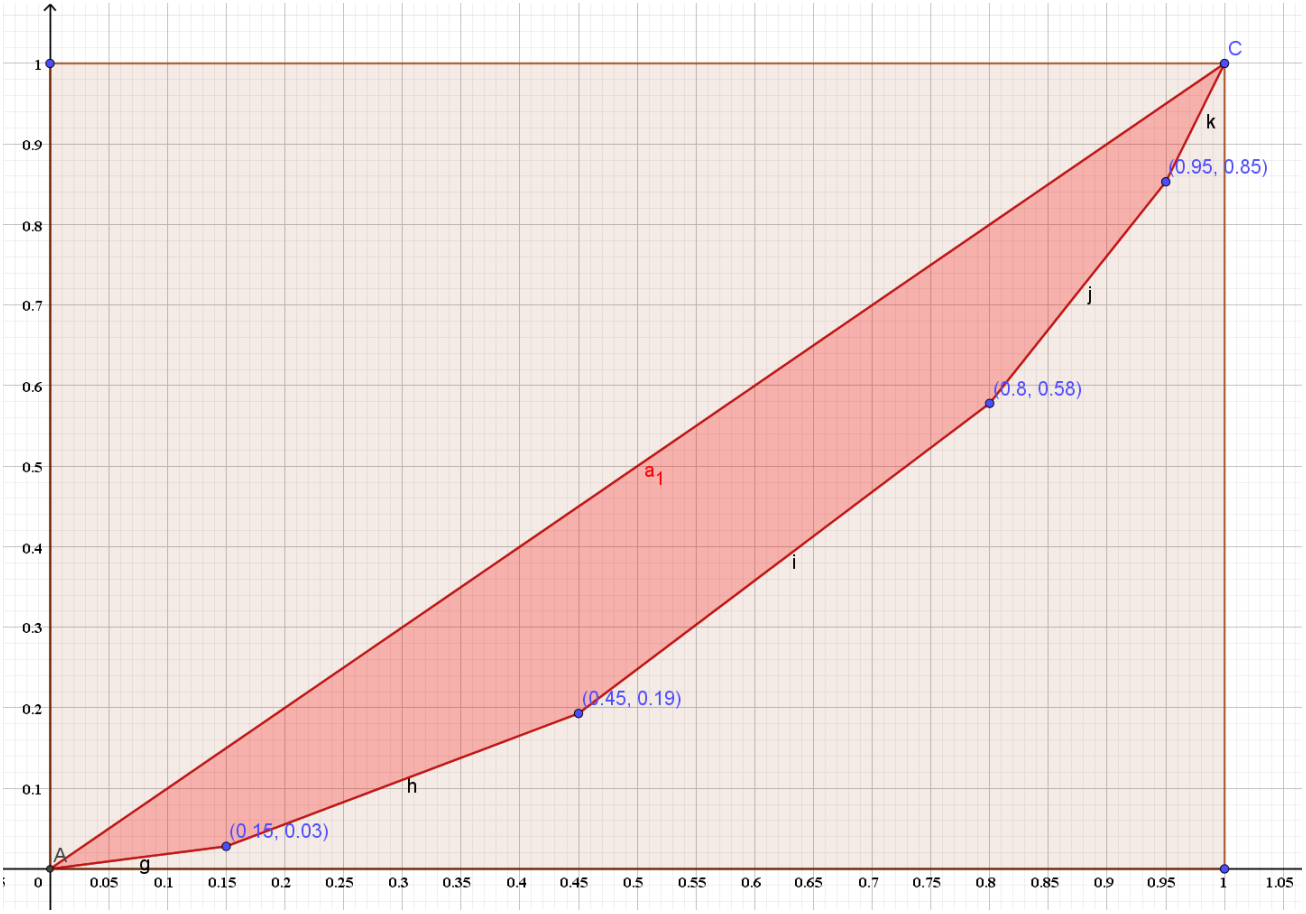


$$\overline{x_{Median}} = 1.000 + \frac{1.000(0,5-0,45)}{0,35} = 1.142,86$$

$$\overline{x_{quartile\,1}} = 500 + \frac{500(0,25-0,15)}{0,3} = 666,67$$

$$\overline{x_{quartile\,3}} = 1.000 + \frac{1.000(0,75-0,45)}{0,35} = 1.857,14$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		**Lorenzkurve & Gini-Koeffizient**								
2		Klasse	Häufigkeit (absolut)	Häufigkeit (relativ)	kum. Häufigkeit (relativ)		Gewicht	Gewicht pro Klasse	Gewicht pro Klasse (relativ)	kum. Gewicht pro Klasse (relativ)
3		1	30	0,15	0,15		250,00	7.500,00	0,028	0,028
4		2	60	0,30	0,45		750,00	45.000,00	0,165	0,193
5		3	70	0,35	0,80		1.500,00	105.000,00	0,385	0,578
6		4	30	0,15	0,95		2.500,00	75.000,00	0,275	0,853
7		5	10	0,05	1,00		4.000,00	40.000,00	0,147	1,000
8		Summe	200	1,00				272.500,00	1,000	
9										
10										
11			Flächen-bereich	Fläche	Fläche (Formel)					
12			1	0,00206	0,5*E3*J3					
13			2	0,03303	0,5*(J3+J4)*E4			GK:	0,3527523	
14			3	0,13486	0,5*(J4+J5)*E5					
15			4	0,10734	0,5*(J5+J6)*E6			Formel:	(0,5-D17)/0,5	
16			5	0,04633	0,5*(J6+J7)*E7					
17			Summe:	0,32362						


C
k
(0.95, 0.85)
j
(0.8, 0.58)
a1
i
(0.45, 0.19)
h
(0.15, 0.03)
A
g
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8
0.85
0.9
0.95
1
1.05

(7) Deskriptive Statistik II: Korrelations- & Regressionsanalyse

Teil 1:

In einem Labor wurde für 13 Stahlstäbe gleicher Länge und gleichen Querschnitts, aber unterschiedlichen Kohlenstoffgehalts, die Zugfestigkeit s gemessen.

Es ergab sich nebenstehendes Messergebnis:

C-Gehalt (in%)	Zugfestigkeit in N/mm²
0,10	35,80
0,30	52,20
0,15	40,00
0,60	84,90
0,70	88,50
0,20	43,40
0,50	72,10
0,20	44,50
0,30	56,80
0,15	38,70
0,55	78,30
0,60	82,20
0,20	41,10

a) Ermitteln Sie die zugehörige Regressionsgerade s(C).

b) Wie hoch ist die voraussichtliche Zugfestigkeit bei einem C-Gehalt von 0,9 %?

c) Welcher C-Gehalt muss vorliegen, wenn eine Zugfestigkeit 150 N/mm² gewünscht wird?

d) Berechnen Sie den zugehörigen Korrelationskoeffizient nach Pearson.

Lösungen:

a) Regressionsgerade: $y = 25{,}19 + 94{,}73x$

b) $y = 25{,}19 + 94{,}73 \cdot 0{,}9 \rightarrow y = 110{,}45$

c) $150 = 25{,}19 + 94{,}73 \cdot x \rightarrow x = 1{,}3175\,[\%]$

d) enge positive Korrelation: $r = 0{,}9955$

Teil 2:

Bei Teilnehmern eines Marathons wurden neben der Platzierung auch das Körpergewicht erfasst:

Person	1	2	3	4	5
Platzierung	4	1	3	2	5
Gewicht	83	82	48	62	45

Berechnen Sie den Rang-Korrelationsvergleich nach Spearman und interpretieren Sie Ihr Ergebnis bzw. den Zusammenhang.

Lösung:

Rangfolge Platz	1	2	3	4	5
Rangfolge Gewicht	2	3	4	1	5
d (Differenz)	1	1	1	3	0
d^2	1	1	1	9	0

$$r_S = 1 - \frac{6 \cdot 12}{5 \cdot 24} = 0{,}4$$

⇨ Gewicht und Platzierung besitzen eine sehr schwache positive Korrelation.