

Thema: Differenzen- & Differenzialquotient;
Steigung; Ableitungen

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1 am Ende der Datei

2.) Ableitungen ermitteln I

18	
----	--

Bilden Sie jeweils die ersten beiden Ableitungen der Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = x^3 + x^2 - x - 7 \quad \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \\ f''(x) = 6x + 2 \end{array}$$

$$\text{b) } f(x) = 2x^5 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x \quad \begin{array}{l} f'(x) = 10x^4 - 2x^2 - \frac{1}{2} \\ f''(x) = 40x^3 - 4x \end{array}$$

$$\text{c) } f(x) = 1,4x^3 - 0,8x^2 - 2x + 1 \quad \begin{array}{l} f'(x) = 4,2x^2 - 1,6x - 2 \\ f''(x) = 8,4x - 1,6 \end{array}$$

3.) Ableitungen ermitteln II

20	
----	--

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung der Funktionen:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2}{x^3} \quad f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \rightarrow f'(x) = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x^7} \quad f(x) = \sqrt{x^7} = x^{\frac{7}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}} = \frac{7}{2} \cdot \sqrt{x^5}$$

$$\text{c) } f(x) = 3x^n \quad f'(x) = 3n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{d) } f(x) = (x-3)^2$$

$$f(x) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \rightarrow f'(x) = 2x - 6$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{1}{n} x^{2n} \quad f'(x) = 2n \cdot \frac{1}{n} x^{2n-1} = 2 \cdot x^{2n-1}$$

4.) Differentialquotient

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ mittels h-Methode und Differentialquotient:

$$\text{Ansatz: } m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{mit } f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{mit } f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h} = \frac{\frac{1}{4}(x^2 + 2xh + h^2) - \frac{1}{4}x^2}{h}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2}{h} = \frac{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h\right)h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2}x$$

5.) Steigungen berechnen I

Gegeben seien die folgenden Funktionen und die jeweiligen x-Stellen.

Berechnen Sie daraus die Steigung an der Stelle x.

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 \quad x = 3$$

$$f'(x) = 2x^3 - 4x \quad \xrightarrow{x=3} \quad f'(3) = 2 \cdot 27 - 4 \cdot 3 = 54 - 12 = 42 = m$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad x = 5$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^3} \quad \xrightarrow{x=5} \quad f'(5) = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125} = -0,008 = m$$

6.) Steigungen berechnen II

12	
----	--

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = 0 \xrightarrow[\text{"Nullprodukt"}]{\text{Ausklammern}} \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 4$$

b) Welche Steigungen besitzt die Funktion an den Stellen $x = 0$ und $x = 4$?

$$f'(x) = -x + 2$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = -0 + 2 = 2 = m_1$$

$$\xrightarrow{x=4} f'(4) = -4 + 2 = -2 = m_2$$

c) Bestimmen Sie $f'(-3)$

$$f'(x) = -x + 2 \xrightarrow{x=-3} f'(-3) = -(-3) + 2 = 5 = m$$

7.) Ableitung erklären

3	
---	--

Erläutern Sie, warum die Ableitung von $f(x) = 3$ den Wert 0 hat.

Geometrische Erklärung:

$f(x) = 3$ ist eine horizontale lineare Funktion parallel zur x-Achse mit der Steigung $m = 0$.

Analytische Erklärung mittels der Ableitung:

Um die Ableitung zu bilden kann man die Funktion wie folgt darstellen:

$$f(x) = 3 = 3 \cdot x^0 \xrightarrow{\text{Ableitung}} f'(x) = 3 \cdot 0 \cdot x^{0-1} = 0$$

Zusatzaufgabe:

5	
---	--

Gegeben ist die 1. Ableitung einer Funktion durch $f'(x) = 4x^5 - 8x^3 + 6x - 2$

Wie lautet die Funktionsvorschrift $f(x)$?

$$f(x) = \frac{4}{6}x^6 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{6}{2}x^2 - 2x = \frac{2}{3}x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 2x$$

1.) Pascalsches Dreieck

a) Wie lautet der Ausdruck $(x + 2)^8$ in ausmultiplizierter Form?

Pascal	1	8	28	56	70	56	28	8	1
x	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
2	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
Ergebnis	x^8	$16x^7$	$112x^6$	$448x^5$	$1120x^4$	$1792x^3$	$1792x^2$	$1024x^1$	$256x^0$

b) Bestimmen Sie den Ausdruck $(3x - 4)^5$

Pascal	1	5	10	10	5	1
3x	$(3x)^5 = 243x^5$	$(3x)^4 = 81x^4$	$(3x)^3 = 27x^3$	$(3x)^2 = 9x^2$	$3x^1$	$(3x)^0 = 1$
(-4)	$(-4)^0 = 1$	$(-4)^1 = (-4)$	$(-4)^2 = 16$	$(-4)^3 = (-64)$	$(-4)^4 = 256$	$(-4)^5 = (-1024)$
Ergebnis	$243x^5$	$(-1620)x^4$	$4230x^3$	$(-5760)x^2$	$3840x$	(-1024)