| 11. Jgst. | 4. Test | Datum: 14.12.2022 |
|---|---|---|
| Klasse: GY 22a | Fach: Mathematik (Kernfach) | |

**Thema: Ganzrationale Funktionen (Linearfaktoren, Symmetrie, Nullstellen, Horner-Schema)**

| **Name:** | |
|---|---|
| **Punkte:** | **Note:** |

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

**1.) Horner-Schema (Theorie)**

Erklären Sie kurz die Vorgehensweise des Horner-Schemas.

Erklärung Horner-Schema am Beispiel möglich.

**2.) Horner-Schema (Praxis)**

Bestimmen Sie die Funktionswerte mit dem Horner-Schema:

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 \qquad \text{für } x = -3$$

| | 1 | 5 | 5 | -5 | -6 |
|---|---|---|---|---|---|
| x = -3 | | -3 | -6 | 3 | 6 |
| | 1 | 2 | -1 | -2 | 0 |

$$f(x) = x^3 + 4x^2 \qquad \text{für } x = 10$$

| | 1 | 4 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| x = 10 | | 10 | 140 | 1.400 |
| | 1 | 14 | 140 | 1.400 |

**3.) Nullstellen berechnen**

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 5x + 1$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | x-Potenzen | $x^3$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ | | |
| | Koeffizienten | -1 | 5 | -5 | 1 | | |
| x-Wert | 1 | | -1 | 4 | -1 | | |
| | Ergebnis | -1 | 4 | -1 | 0 | 1. Nullstelle: | 1 |
| | | x2 | x1 | x0 | | | |

Weitere Nullstellen:

$$f(x) = (-x^2 + 4x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \xrightarrow{\cdot(-1)} x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x_{2/3} = -2 \pm \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3} \approx -2 \pm 1{,}73$$

b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

$$f(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \xrightarrow{\textit{Substitution}} u^2 - 10u + 9 = 0$$

$$u_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25-9} = 5 \pm 4 \rightarrow u_1 = 9 \quad und \quad u_2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{Re}-\textit{Substitution}} x^2 = 9 \rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \quad und \quad x^2 = 1 \rightarrow x_{3/4} = \pm 1$$

c) $f(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$

$$f(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

d) $f(x) = x^{10} + x^9 - 110x^8$

$$f(x) = (x^2 + x - 110)x^8 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$x^2 + x - 110 = 0 \rightarrow x_{1/2} = -0{,}5 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 110} = -\frac{1}{2} \pm \frac{21}{2} \rightarrow x_1 = 11 \quad und \quad x_2 = -10$$

**4.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur)**

a) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung

**Funktion 1: Grad 3; Nullstelle x = -3 (doppelt), Nullstelle x = 2 und P(-1/8)**

$$f(x) = c(x+3)^2(x-2) \rightarrow f(-1) = c \cdot 4 \cdot (-3) = 8 \rightarrow c \cdot (-12) = 8 \rightarrow c = -\frac{2}{3}$$

**Funktion 2: Grad 4; Nullstelle x = 2 (dreifach); Nullstelle x = -1 und P(0/-3)**

$$f(x) = c(x-2)^3(x+1) \rightarrow f(0) = c \cdot (-8) \cdot 1 = -3 \rightarrow c \cdot (-8) = -3 \rightarrow c = \frac{3}{8}$$

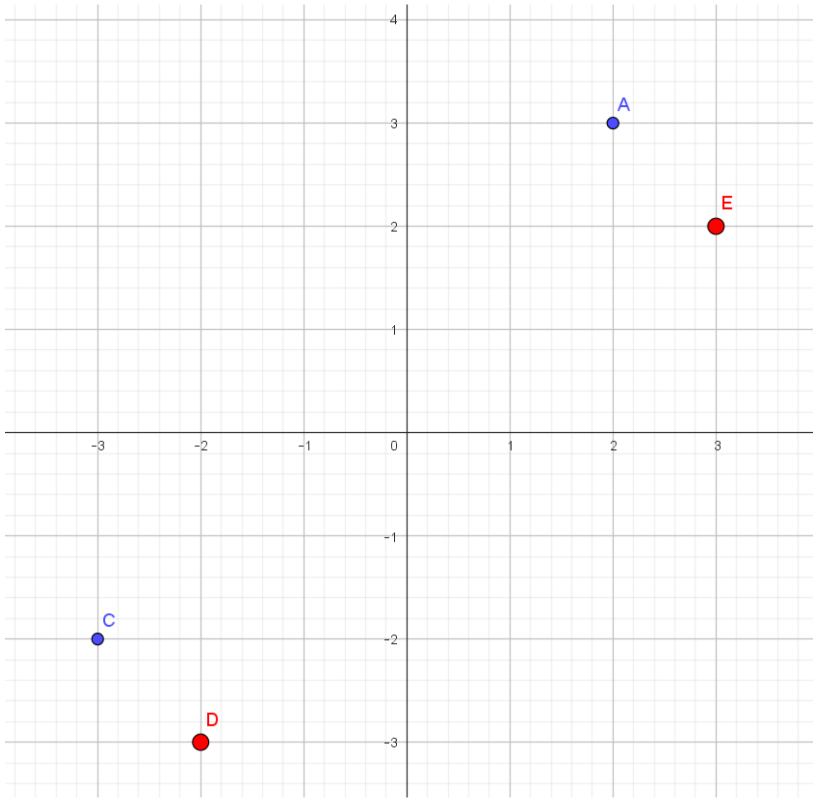
**Funktion 3: Grad 4; P(1/2) und vier Nullstellen bei** $x = \{-5; -2; 1; 3\}$

$$f(x) = c(x+5)(x+2)(x-1)(x-3) \rightarrow f(1) = c \cdot 6 \cdot 3 \cdot (1-1) \cdot (-2) = 2$$

$\rightarrow$ Lösung nicht möglich wegen Nullprodukt: $\rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Funktion

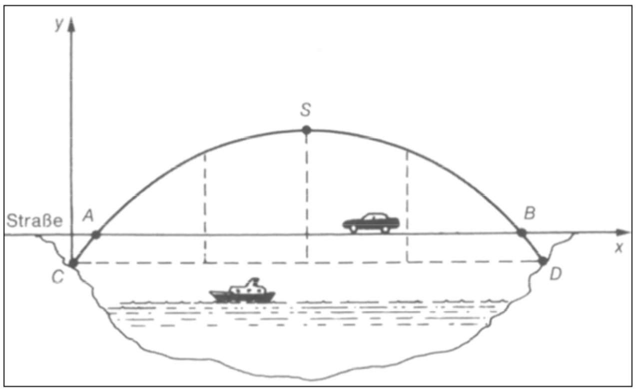
b) Zeichnen Sie die ganzrationale Funktion aufgrund der gegebenen Eigenschaften in das Koordinatensystem:

**Funktion: Grad 3; punktsymmetrisch zum Ursprung; P(2/3) und Q(-3/-2)**




**5.) Anwendungen zu Quadratischen ganzrationalen Funktionen**

Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch: $b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9$




Die unter Straßenniveau liegenden Auflagepunkte der Brücke sind C und D.

a) Bestimmen Sie die Höhe der Brücke vom Straßenniveau aus.

b) Berechnen Sie die Länge der Straße auf dieser Brücke.

c) Wie tief liegt der Auflagepunkt C unterhalb der Straße?

$$b(x) = -\frac{1}{25}x^2 + 2x - 9 = 0 \xrightarrow{\cdot(-25)} x^2 - 50x + 225 = 0$$

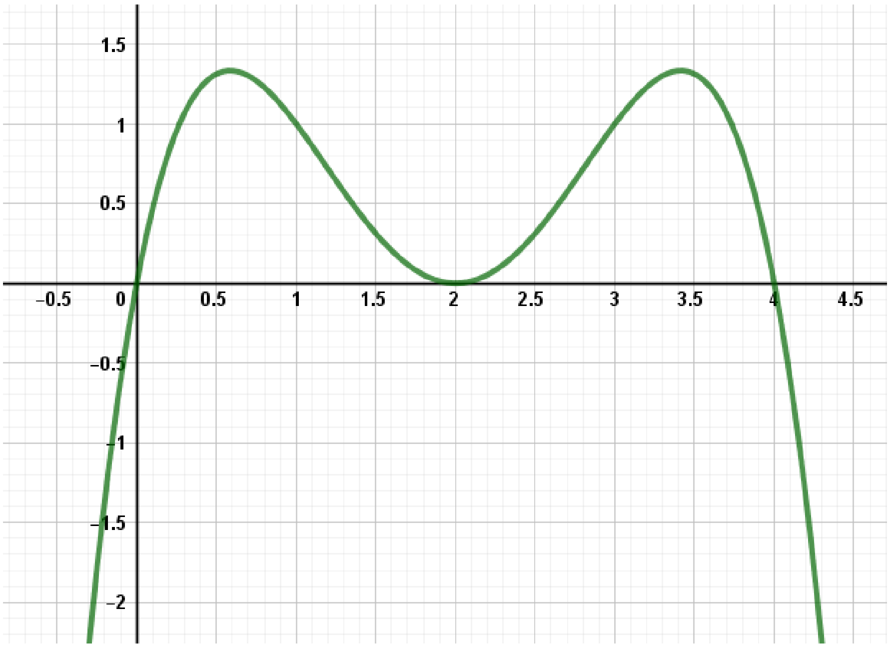
$$\rightarrow \quad x_{1/2} = 25 \pm \sqrt{625 - 225} = 25 \pm 20 \quad \rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \rightarrow \quad x_2 = 45$$

Abstand: $e = 45 - 5 = 40$ Auflagepunkt: $b(0) = -9$

Höhe der Brücke: $b(25) = -\frac{1}{25} \cdot 25^2 + 2 \cdot 25 - 9 = -25 + 50 - 9 = 16$

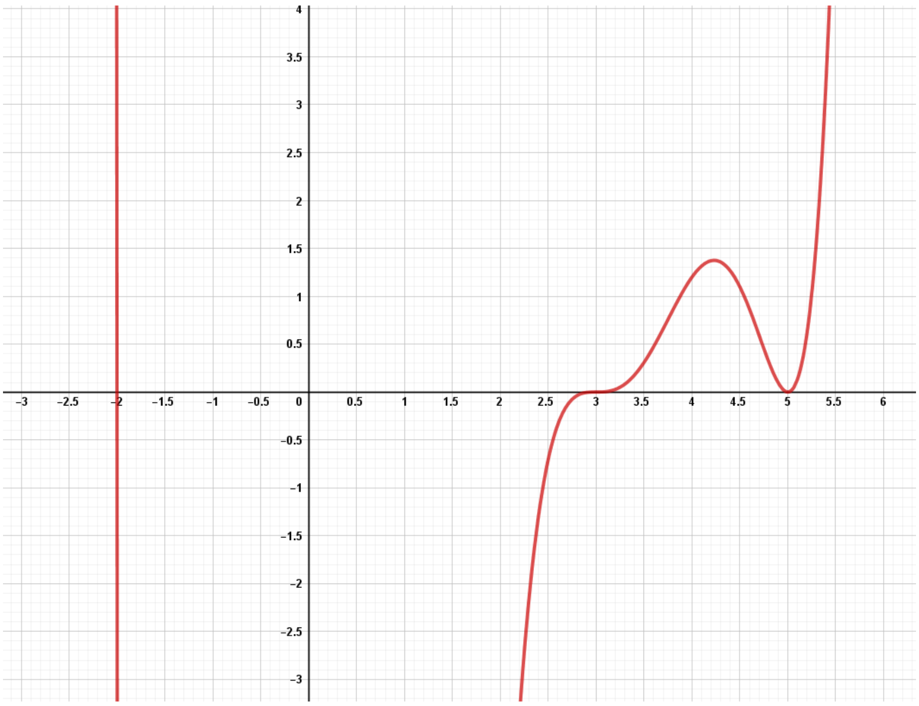
**6.)** **Funktion aus gegebenem Graphen bestimmen**

Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift aus dem Graphen in der Linearfaktordarstellung




$$f(x)=c\cdot x\cdot(x-2)^2(x-4) \quad\rightarrow\quad f(1)=c\cdot 1\cdot(1-2)^2(1-4)=1 \quad\rightarrow\quad c\cdot 1\cdot 1\cdot(-3)=1 \quad\rightarrow\quad c=-\frac{1}{3}$$

***ZUSATZFRAGE:*** ***In welchem Punkt schneidet die Funktion die y-Achse, wenn c = 0,2 ist?***



$$f(x)=c(x+2)(x-3)^3(x-5)^2 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{1}{5}(0+2)(0-3)^3(0-5)^2=y$$

$$f(0)=\frac{1}{5}\cdot 2\cdot(-27)\cdot 25=y \quad\rightarrow\quad y=-270$$