11. Jgst.	4. Test	Datum: 14.12.2022
Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ganzrationale Funktionen (Linearfaktoren, Symmetrie, Nullstellen, Horner-Schema)

Name:	
Punkte:	**Note:**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Horner-Schema (Theorie)

Nennen Sie **zwei Aspekte**, für die das Horner-Schema verwendet werden kann.

(1) Berechnung von Funktionswerten
(2) Abspaltung von Linearfaktoren zur Umgehung der Polynomdivision
(3) Berechnung von Werten der 1. bis n-ten Ableitung
(4) Umrechnung von Zahlensystemen

2.) Horner-Schema (Praxis)

Bestimmen Sie die Funktionswerte mit dem Horner-Schema:

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 10x - 2 \qquad \text{für } x = -4$$

	2	-4	8	-10	-2
x = -4		-8	48	-224	936
	2	-12	56	-234	934

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad \text{für } x = 8$$

	0,5	-3	0	0
x = 8		4	8	64
	0,5	1	8	64

3.) Nullstellen berechnen

Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 10x - 2$

	x-Potenzen	x^3	x^2	x^1	x^0		
	Koeffizienten	4	8	-10	-2		
x-Wert	1		4	12	2		
	Ergebnis	4	12	2	0	1. Nullstelle:	1
		x2	x1	x0			

Weitere Nullstellen:

$$f(x) = (4x^2 + 12x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\rightarrow \quad 4x^2 + 12x + 2 = 0 \xrightarrow{:4} x^2 + 3x + 0{,}5 = 0$$

$$\rightarrow \quad x_{2/3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{1}{2}} = -1{,}5 \pm \sqrt{\frac{7}{4}} \approx -1{,}5 \pm 1{,}32$$

b) $f(x) = (x^2-16)(x^2+4)$

$$f(x) = (x^2-16)(x^2+4)=0 \quad \rightarrow \quad x_{1/2}=\pm 4$$

c) $f(x) = x^{100}+x^{98}-56x^{96}$

$$f(x) = (x^4+x^2-56)x^{96}=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

$$x^4+x^2-56=0 \xrightarrow{Substitution} u^2+u-56=0$$

$$u_{1/2}=-0{,}5\pm\sqrt{56{,}25}=-0{,}5\pm 7{,}5 \quad \rightarrow \quad u_1=7 \quad und \quad u_2=-8$$

$$\xrightarrow{\text{Re}-Substitution} x^2=7 \quad \rightarrow \quad x_{1/2}=\pm\sqrt{7} \quad und \quad x^2=-8 \quad \rightarrow \quad nicht\ lösbar\ in\ \Re$$

d) $f(x) = x^4-5x^2+4$

$$f(x) = x^4-5x^2+4=0 \xrightarrow{Substitution} u^2-5u+4=0$$

$$u_{1/2}=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-4}=2{,}5\pm 1{,}5 \quad \rightarrow \quad u_1=4 \quad und \quad u_2=1$$

$$\xrightarrow{\text{Re}-Substitution} x^2=4 \quad \rightarrow \quad x_{1/2}=\pm 2 \quad und \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x_{3/4}=\pm 1$$

4.) Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen (Grundstruktur)

a) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift der ganzrationalen Funktionen aufgrund der gegebenen Eigenschaften in der Linearfaktordarstellung

Funktion 1: Grad 3; Nullstelle x = 1, Nullstelle x = -4 (doppelt) und P(1/4)

$$f(x)=c(x-1)(x+4)^2 \quad \rightarrow \quad f(1)=c(1-1)(x+4)^2=4$$

$\rightarrow$ Lösung nicht möglich wegen Nullprodukt: $\rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Funktion

Funktion 2: Grad 4; Nullstelle x = -2 (dreifach); Nullstelle x = 3 und P(2/1)

$$f(x)=c(x+2)^3(x-3) \quad \rightarrow \quad f(2)=c(2+2)^3(2-3)=1$$

$$\rightarrow \quad c\cdot 64\cdot(-1)=1 \quad \rightarrow \quad c=-\frac{1}{64}$$

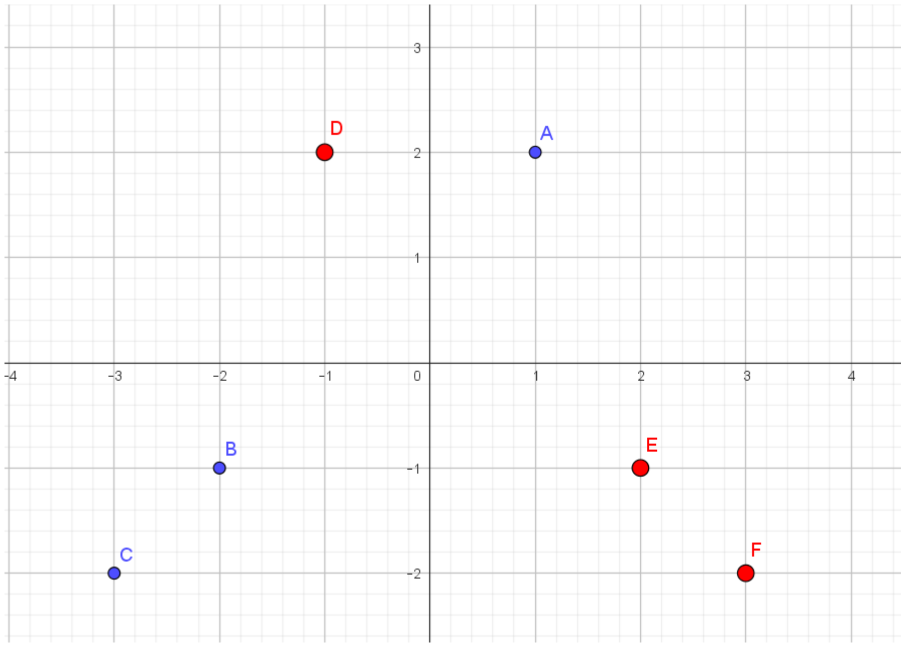
Funktion 3: Grad 4; P(0/2) und vier Nullstellen bei $x=\{-4;-2;2;4\}$

$$f(x)=c(x+4)(x+2)(x-2)(x-4) \quad \rightarrow \quad f(0)=c\cdot 4\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-4)=2$$

$$\rightarrow \quad c\cdot 64=2 \quad \rightarrow \quad c=\frac{1}{32}$$

b) Zeichnen Sie die ganzrationale Funktion aufgrund der gegebenen Eigenschaften in das Koordinatensystem:

Funktion: Grad 4; achsensymmetrisch; P(1/2); Q(2/-1) und R(-3/-2)



5.) Anwendungen zu Quadratischen ganzrationalen Funktionen

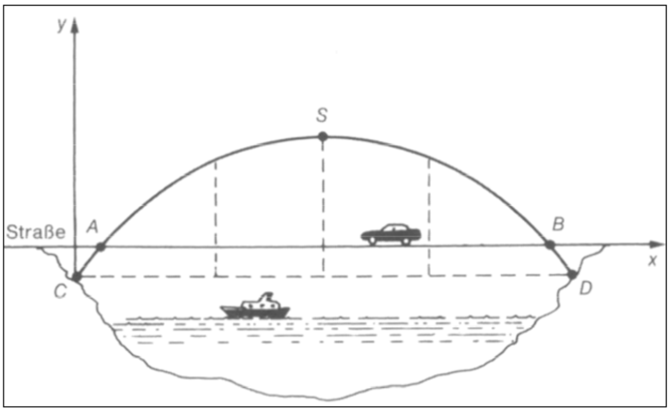
Eine parabelförmige Bogenbrücke wird beschrieben durch: $b(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 3x - 12{,}5$

Die unter Straßenniveau liegenden Auflagepunkte der Brücke sind C und D.

a) Bestimmen Sie die Höhe der Brücke vom Straßenniveau aus.

b) Berechnen Sie die Länge der Straße auf dieser Brücke.

c) Wie tief liegt der Auflagepunkt C unterhalb der Straße?



$$b(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 3x - 12{,}5 = 0 \xrightarrow{\cdot(-10)} x^2 - 30x + 125 = 0$$

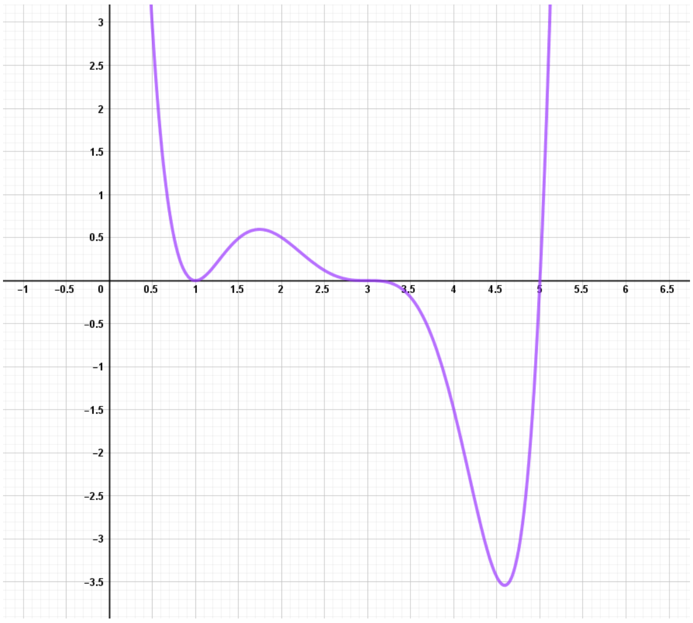
$$\rightarrow \quad x_{1/2} = 15 \pm \sqrt{225 - 125} = 15 \pm 10 \quad \rightarrow \quad x_1 = 5 \quad \rightarrow \quad x_2 = 25$$

Abstand: $e = 25 - 5 = 20$ Auflagepunkt: $b(0) = -12{,}5$

Höhe der Brücke: $b(15) = -\frac{1}{10} \cdot 225 + 3 \cdot 15 - 12{,}5 = -22{,}5 + 45 - 12{,}5 = 10$

6.) **Funktion aus gegebenem Graphen bestimmen**

Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift aus dem Graphen in der Linearfaktordarstellung



$$f(x)=c(x-1)^2(x-3)^3(x-5) \quad \rightarrow \quad f(2)=c(2-1)^2(2-3)^3(2-5)=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \quad c\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad c=\frac{1}{6}$$

ZUSATZFRAGE: ***In welchem Punkt schneidet die Funktion die y-Achse, wenn c = 0,5 ist?***

$$f(x)=c(x+2)(x-3)^3(x-5)^2 \quad \rightarrow \quad f(0)=\frac{1}{2}(0+2)(0-3)^3(0-5)^2=y$$

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-27)\cdot 25=y \quad \rightarrow \quad y=-675$$