11. Jgst.	4. Klassenarbeit	Datum: 23.06.2023
	Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)

Thema: Untersuchung ganzrationaler Funktionen (Kurvendiskussion)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1 Untersuchung einer ganzrationalen Funktion

20	

Gegeben ist die Funktionsvorschrift: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte Funktion $f(x)$.

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

e) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

Lösung:

1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

a) NS: $x(x^2 - 2x - 3) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 3$

b) $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$

$f''(x) = 6x - 4$

$f'''(x) = 6$

c) Extrema: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{6} = \frac{4 \pm 7{,}2}{6}$ ⟨ $x_1 \approx 1{,}8$, $x_2 = -0{,}53$

$f''(x) = 6x - 4$

$f''(1{,}8) > 0 \rightsquigarrow TP(1{,}8 / \quad)$

$\rightsquigarrow HP(-0{,}53 / \quad)$

d) Monotonie: $I_1 =]-\infty; -0{,}53[$ monoton steigend

$I_2 =]-0{,}53; 1{,}8[$ monoton fallend

$I_3 =]1{,}8; \infty[$ monoton steigend

e) Wendepunkt: $f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightsquigarrow x = \frac{2}{3}$

$f'''(x) = 6 \neq 0 \rightsquigarrow WP(\frac{2}{3} / \quad)$

Aufgabe 2 **Steigungen und Tangente(n)**

10	

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

a) Berechnen Sie die Tangente in **x = 3** an die Funktion

b) An welchen Stellen hat die Funktion die Steigung $m = f'(x) = -\frac{3}{4}$?

② Tangente

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 \rightsquigarrow f(3) = 0$

$f'(x) = x^2 - 2x \rightsquigarrow f'(3) = 3 = m$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 3 \cdot 3 + b \\ b &= -9 \\ t(x) &= 3x - 9 \end{aligned}\right.$$

b) $f'(x) = x^2 - 2x = -\frac{3}{4}$

$x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{2} = \frac{2 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

Aufgabe 3 **„Absatzprobleme“** | 10 |

Während ihrer umfangreichen Reisetätigkeit mit der Deutschen Bahn AG ist der Ernährungs- und Gesundheitsberaterin Kunigunde Tschieß-Börger aufgefallen, dass ein bemerkenswerter Zusammenhang besteht zwischen der **Höhe h (in cm)** ihrer Stöckelschuhe und der **Wahrscheinlichkeit w(h)** dafür, dass sie ihren Reiskoffer selbst vom Bahnsteig zum Taxi tragen muss.
Der funktionale Zusammenhang zwischen **w und h** kann durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$w(h) \quad = \quad \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \quad mit \quad h \in [0\,;10]$$

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen, **wenn h die Werte der Intervallgrenzen annimmt**?

b) Wie hoch darf die Absatzhöhe maximal sein, damit die Wahrscheinlichkeit höchstens 50 % beträgt?

c) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, am kleinsten?

Anmerkung: Berechnen Sie auch hier die Wahrscheinlichkeit und zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt.

Lösung:

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Koffer selbst tragen zu müssen, wenn h die Werte der Intervallgrenzen annimmt?

$$w(0) \quad = \quad 0{,}9 \quad \to \quad 90[\%] \quad und \quad w(10) \quad = \quad \frac{100}{100} - 0{,}16 \cdot 10 + 0{,}9 \quad = \quad 0{,}3 \quad \to \quad 30[\%]$$

b) Wie hoch darf die Absatzhöhe maximal sein, damit die Wahrscheinlichkeit w(h) höchstens 50 % beträgt?

$$\frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}9 \quad \le \quad 0{,}5 \quad \xrightarrow{-0{,}5} \quad \frac{1}{100}h^2 - 0{,}16h + 0{,}4 \quad \le \quad 0$$

$$h_{1/2} \quad = \quad \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} \quad = \quad \frac{0{,}16 \pm \sqrt{0{,}0256 - 0{,}016}}{\frac{2}{100}} \quad = \quad \frac{0{,}16 \pm 0{,}098}{\frac{2}{100}}$$

$$h_1 \quad \le \quad 12{,}9 \quad und \quad h_2 \quad \ge \quad 3{,}1 \quad \Rightarrow \quad h \in [3{,}1\,;10]$$

Die Lösung $h_1 = 12{,}9$ ist nicht im Definitionsbereich.

c) Bei welcher Absatzhöhe ist die Wahrscheinlichkeit, den Koffer selbst tragen zu müssen, am kleinsten?
Anmerkung: ***Zeigen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellt***.

$$w'(h) \quad = \quad \frac{1}{50}h - 0{,}16 \quad = \quad 0 \quad \to \quad h \quad = \quad 8$$

$$w''(h) \quad = \quad \frac{1}{50} \quad > \quad 0 \quad \to \quad Min\,bei\,h \quad = \quad 8 \quad \to \quad Min(8 \mid 0{,}26)$$




Aufgabe 4 **Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung.** | 6 | |

(i) $$f(x) = -4x^5 + 2x^2 + x - 4$$

(ii) $$g(x) = -2x^7 + x^3 - 4x$$

(iii) $$h(x) = -3x^{8(n+1)} + 4x^{2(n-1)} \quad mit \quad n \in N \wedge n > 1$$

Lösung:

(i) Keine Symmetrie, da gerade und ungerade Exponenten vorliegen.

(ii) Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorliegen.

(iii) Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorliegen.

Aufgabe 5 **Gibt es solche Funktionen?** | 6 | |

Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** mit dem Definitionsbereich $D = \Re$ zu **zeichnen**, der folgende Eigenschaften hat. Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

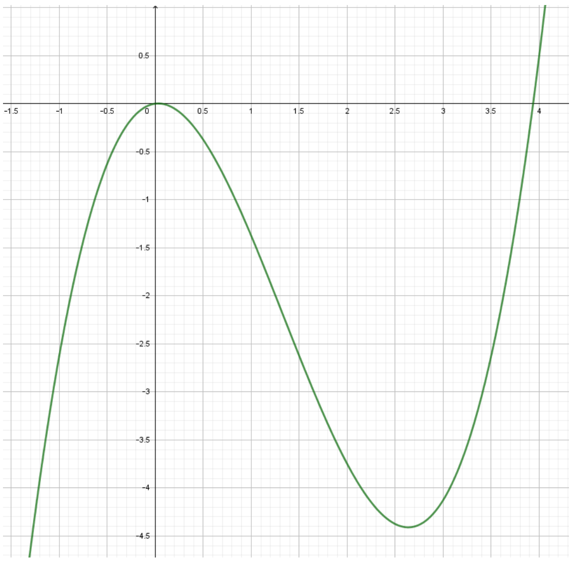
a) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt und keinen relativen Extrempunkt.

b) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und genau einen relativen Tiefpunkt.

Lösung:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{8}x$



Aufgabe 6 **Wissen – Rechnen – Entscheiden – Beurteilen - Begründen**

48	

Teil 1:

Der Graph zeigt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs auf einer Teststrecke.

a) Woran erkennt man, dass die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich hoch ist?

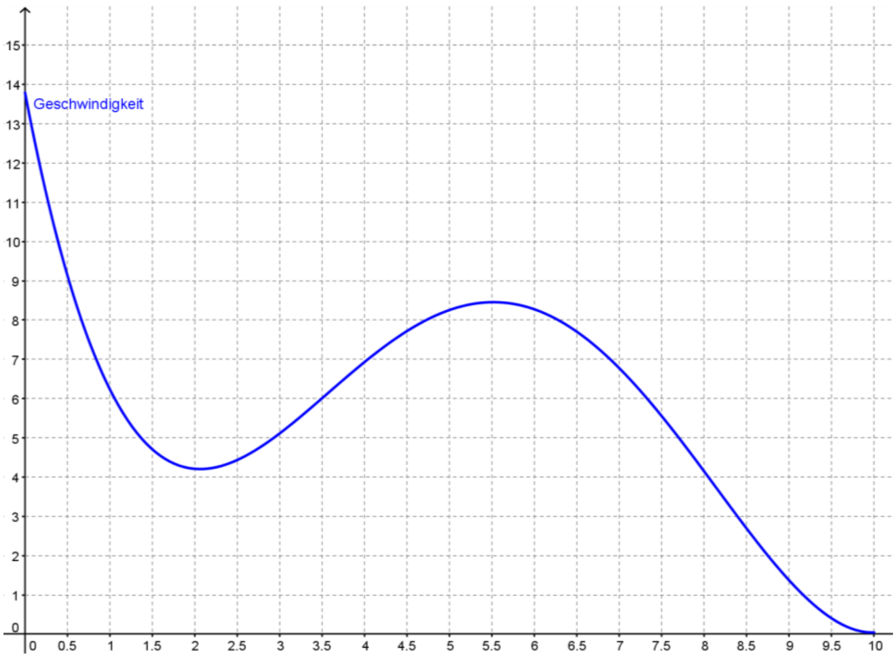
b) Welche Geschwindigkeit besitzt das Fahrzeug zu Beginn?

c) Zu welchem Zeitpunkt für **t > 2** war die Geschwindigkeit am höchsten und wie hoch war sie?

d) In welchen Zeiträumen wurde gebremst? In welchem Zeitraum wurde beschleunigt?

e) Zu welchem Zeitpunkt war für **t > 3** der Bremsvorgang maximal?

f) Wie ist die Nullstelle bei **t = 10** für die Situation zu bewerten?



Lösung:

a) **Funktion ist eine Kurve mit unterschiedlichen Funktionswerten (keine Konstante).**

b) **In t = 0 besitzt das Fahrzeug eine Startgeschwindigkeit von v = 14 [m/s]**

c) **t = 5,5** **v = 8,5 [m/s]**

d) **Intervall Bremsen** **[0 ; 2 [und]5,5 ; 10]**

Intervall Beschleunigung **] 2 ; 5,5 [**

e) **Bei t = 8 war der Bremsvorgang maximal ausgeprägt (=> WP)**

f) **Hier kommt das Testfahrzeug zum Stehen (v = 0)**

Teil 2:

Von den Ergebnissen der Kurvenuntersuchung zum Graphen

Bei Funktionsuntersuchungen kam es zu folgenden Ergebnissen:

a) achsensymmetrisch; Nullstellen bei 4 und −4; $T_1(-2|-3)$, $H(0|3)$, $T_2(2|-3)$, $W_1(1|2)$; $W_2(-1|2)$; $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.
b) punktsymmetrisch zum Ursprung, $y_s = 0$; Nullstellen bei −3, 0, 3; keine Extrempunkte, $W(0|0)$; $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$.
c) nicht symmetrisch, $y_s = 0$; Nullstellen bei 0, 3, 6; $T(1|1{,}2)$; $H(3|0)$; $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

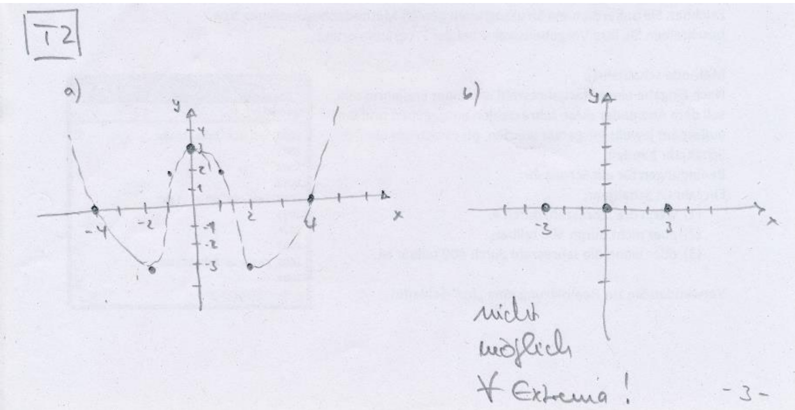
Erstellen Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen oder begründen Sie, warum eine Zeichnung nicht möglich ist.

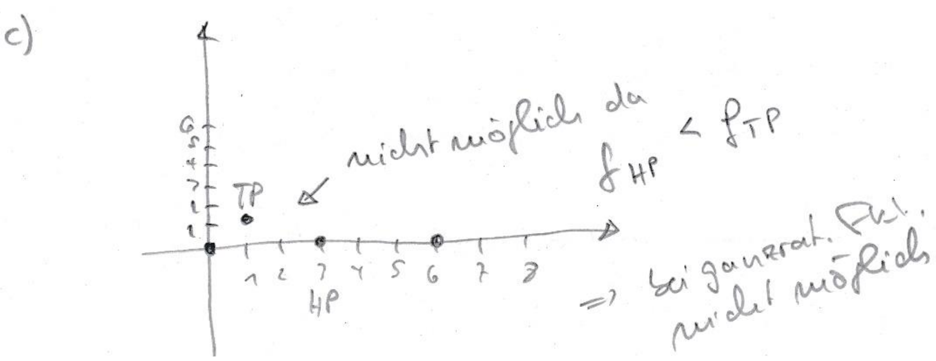
Lösung:

a) Kann nur gezeichnet werden, wenn man noch zwei Nullstellen in achsensymmetrischer Form im Intervall]-2 ; 2 [hinzufügt.

b) Kann nicht gezeichnet werden, da zwischen den Nullstellen die notwendigen Extrema fehlen.

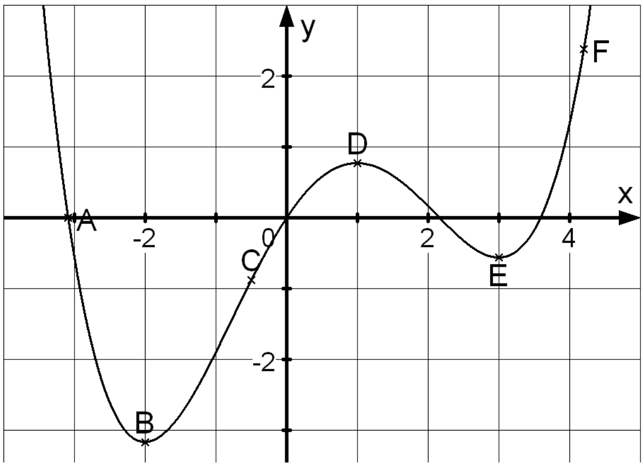
c) Kann nicht gezeichnet werden, da der Funktionswert des HP kleiner ist als der Funktionswert des TP.





Teil 3:

Gegeben ist die Funktion f(x).
Tragen Sie in der Tabelle ein, ob $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in den markierten Punkten positiv (>0), negativ (<0) oder Null sind



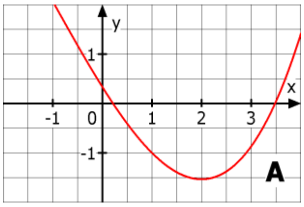
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
B			
D			
E			
F			

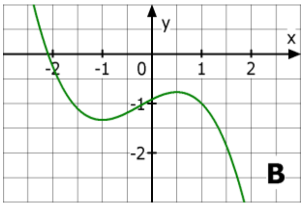
Lösung:

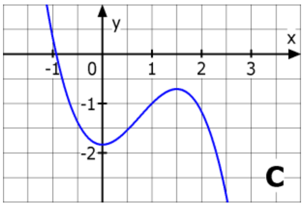
	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
B	f(x) < 0	f'(x) = 0	f''(x) > 0
D	f(x) > 0	f'(x) = 0	f''(x) < 0
E	f(x) < 0	f'(x) = 0	f''(x) > 0
F	f(x) > 0	f'(x) > 0	f''(x) > 0

Teil 4:

Für eine Funktion f soll gelten: $f(1) = -1$, $f'(1) = -1$ und $f''(1) < 0$.
Welcher der Graphen A, B oder C erfüllt alle Bedingungen?







Der gesuchte Graph ist

A ☐

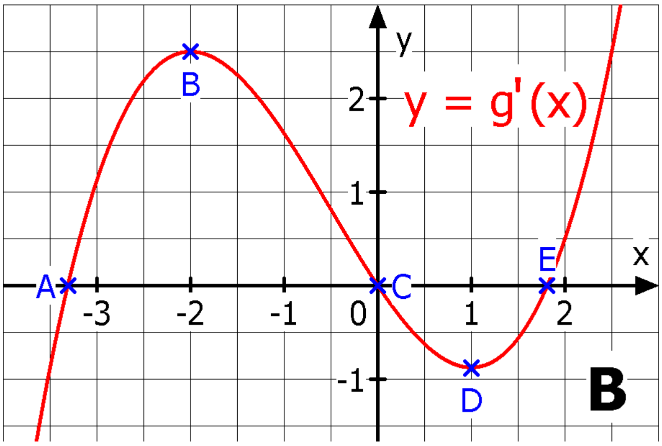
B **X**

C ☐

Teil 5:

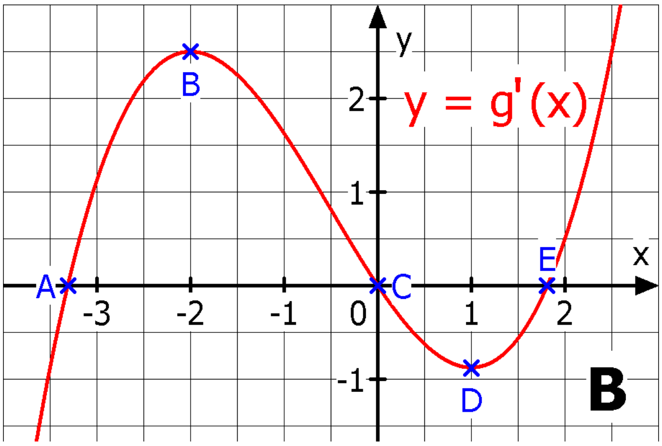
Die Abbildung zeigt den ***Graphen der Ableitung einer Funktion g***.

Die markierten Punkte sind entweder Extrempunkte (HP oder TP) oder Wendepunkte (WP) des Graphen von g. Kreuzen Sie in der Tabelle das jeweils korrekte Feld an.



	HP	TP	WP
A			
B			
C			
D			
E			

Lösung:



	HP	TP	WP
A		**X**	
B			**X**
C	**X**		
D			**X**
E		**X**	

ZUSATZAUFGABE:

6	

Entscheiden Sie, ob die Aussagen zur Funktion f bzw. zu ihrem Graphen (W)ahr oder (F)alsch sind. => ***Erklärung der Entscheidung!!!***

Aussage 1: Ist f streng monoton steigend im Intervall I, so ist f' negativ für alle x aus dem Intervall I.

Lösung: FALSCH – f'(x) = m ; wenn m > 0 => f steigt streng monoton => f'(x) > 0

Aussage 2: Ist $f'(2) < 0$, so ist die Funktion f für x = 2 monoton fallend.

Lösung: WAHR – f'(x) = m ; wenn f'(x) < 0 => f fällt streng monoton => m < 0