11. Jgst.	4. Klassenarbeit	Datum: 23.06.2023
Klasse: GY 22a	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Untersuchung ganzrationaler Funktionen (Kurvendiskussion)

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1 Untersuchung einer ganzrationalen Funktion | 20 | |

Gegeben ist die Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

a) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

b) Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von $f(x)$.

c) Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte Funktion $f(x)$.

d) Legen Sie die Monotonieintervalle fest.

e) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ auf Wendepunkte.

Lösung:

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

a) NS: $x^2\left(\frac{1}{3}x - 1\right) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0$ (doppelt) $x_2 = 3$

b) $f'(x) = x^2 - 2x$

$f''(x) = 2x - 2$

$f'''(x) = 2$

c) Extrema: $f'(x) = x(x-2) = 0 \rightsquigarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 2$

$f''(x) = 2x - 2$

$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow HP(0/0) \quad TP(2/-\frac{4}{3})$

d) Monotonie: $I_1 =]-\infty; 0[$ monoton steigend

$I_2 =]0; 2[$ monoton fallend

$I_3 =]2; \infty[$ monoton steigend

e) Wendepunkt: $f''(x) = 2x - 2 = 0 \rightsquigarrow x = 1$

$f'''(x) = 2 \neq 0 \rightsquigarrow WP(1/-\frac{2}{3})$

Aufgabe 2 **Steigungen und Tangente(n)**

10	

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$

a) Berechnen Sie die Tangente in **x = 4** an die Funktion

b) An welchen Stellen hat die Funktion die Steigung $m = f'(x) = \frac{8}{3}$?

Lösung:

② Tangenten

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$

a)

	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	2	
$x=4$		1	2	8	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	$\boxed{10}$	$= f(4)$
$x=4$		1	6		
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\boxed{8}$	$= f'(4)$	

$10 = 4 \cdot 8 + b$

$-22 = b$

$t(x) = 8x - 22$

-1-

b) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - x \overset{!}{=} \frac{8}{3}$

$\frac{3}{4}x^2 - x - \frac{8}{3} = 0$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1 \pm 3}{\frac{3}{2}}$ $x_1 = \frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{4}{3}$

Aufgabe 3 „Heizkostendiskussion“

10	

Jürgen M hat umgesattelt und ein Programmkino erworben. Es hat eine **Gesamtkapazität** von **200 Sitzplätzen**. In den Wintermonaten richten sich die **Heizkosten h** während einer Filmvorführung nach der Auslastung **x (= Besucherzahl pro Vorstellung)** und können durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = 100 - \frac{1}{800}x^2$$

a) Wie lautet der hier sinnvolle Definitionsbereich?

b) Welche Kosten entstehen bei ausverkaufter Kinovorführung?

c) Für welche Besucheranzahl sind die Heizkosten minimal?
Berechnen Sie auch hier die Heizkostenhöhe und begründen Sie, dass Ihre Lösung ein Minimum darstellen muss ***(=> keine zweite Ableitung!)***

Lösung:

3

$$h(x) = 100 - \frac{1}{800}x^2$$

6	

$$D = [0 ; 200]$$

$$h(200) = 100 - \frac{1}{800} \cdot 40000 = 50$$

$$h'(x) = -\frac{1}{400}x = 0 \leadsto x = 0$$

=> Minimum bei $x = 200$ wegen Parabelfunktion nach unten geoffnet + Achsensymmetrie + D

Aufgabe 4 **Welche Symmetrie liegt vor? Begründen Sie Ihre Entscheidung.**

(i) $f(x) = -4x^5 + 2x^3 + x$

(ii) $f(x) = -2x^8 + x^4 - 4x^2 + 6$

(iii) $f(x) = -3x^{8n+1} + 4x^{2n-1} \quad mit \quad n \in N \wedge n > 1$

Lösung:

4

a) PS ungerade Exponenten

b) AS gerade Exponenten

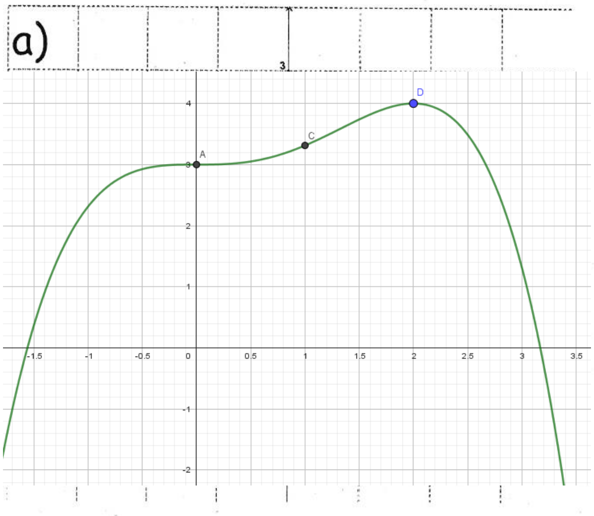
c) PS ungerade Exponenten

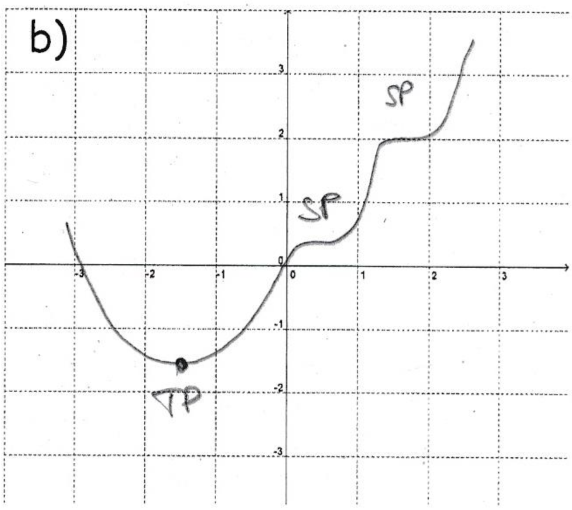
Aufgabe 5 **Gibt es solche Funktionen?** 6

Versuchen Sie den jeweiligen Graphen einer Funktion ***f(x)*** mit dem Definitionsbereich $D = \Re$ zu **<u>zeichnen</u>**, der folgende Eigenschaften hat. Sollte der Graph nicht existieren, so begründen Sie weshalb.

a) ***f(x)*** hat genau einen Wendepunkt, genau einen relativen Hochpunkt und keinen relativen Tiefpunkt.

b) ***f(x)*** hat genau einen relativen Tiefpunkt, keinen relativen Hochpunkt und zwei Wendepunkte.





⇨ muss zwei WP besitzen

Aufgabe 6 **Wissen – Rechnen – Entscheiden – Beurteilen - Begründen** 48

Teil 1:

Der Graph zeigt die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs auf einer Teststrecke.

a) Woran erkennt man, dass die Geschwindigkeit zu verschiedenen Zeitpunkten unterschiedlich hoch ist?

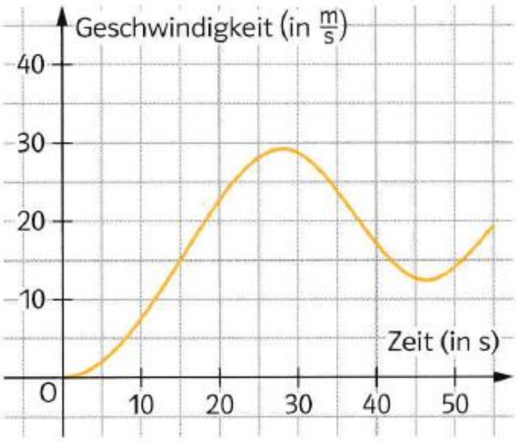
b) Wie müsste der Graph aussehen, wenn die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt gleich hoch wäre?

c) Zu welchem Zeitpunkt war die Geschwindigkeit am höchsten und wie hoch war sie?

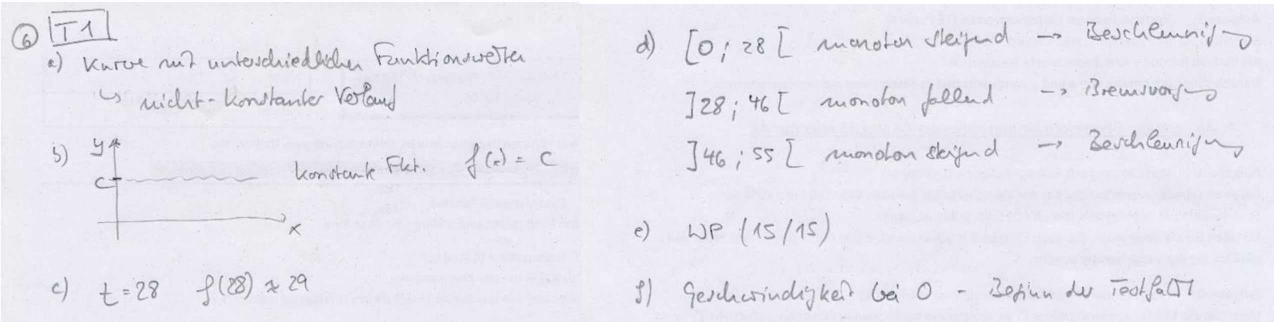
d) In welchen Zeiträumen wurde beschleunigt? In welchem Zeitraum wurde gebremst?

e) Zu welchem Zeitpunkt war die Beschleunigung maximal?

f) Warum startet die Kurve im Ursprung?



Lösung:



Teil 2:

Von den Ergebnissen der Kurvenuntersuchung zum Graphen

Bei Funktionsuntersuchungen kam es zu folgenden Ergebnissen:

a) achsensymmetrisch; Nullstellen bei 4 und −4; $T_1(-2|-3)$, $H(0|3)$, $T_2(2|-3)$, $W_1(1|2)$; $W_2(-1|2)$; $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$.
b) punktsymmetrisch zum Ursprung, $y_s = 0$; Nullstellen bei −3, 0, 3; keine Extrempunkte, $W(0|0)$; $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$.
c) nicht symmetrisch, $y_s = 0$; Nullstellen bei 0, 3, 6; $T(1|1{,}2)$; $H(3|0)$; $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.

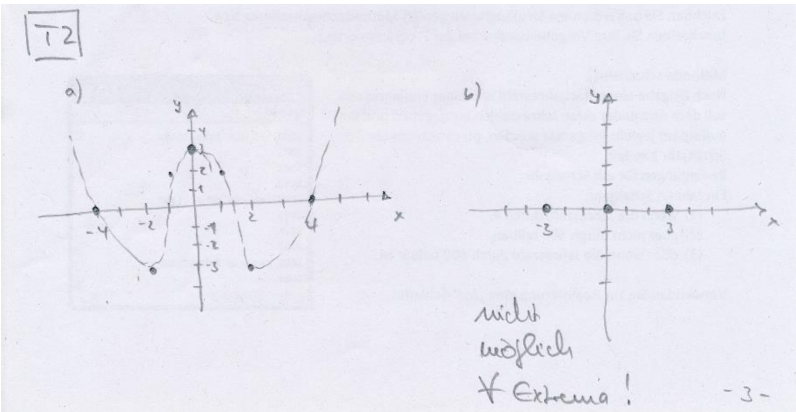
Erstellen Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen oder begründen Sie, warum eine Zeichnung nicht möglich ist.

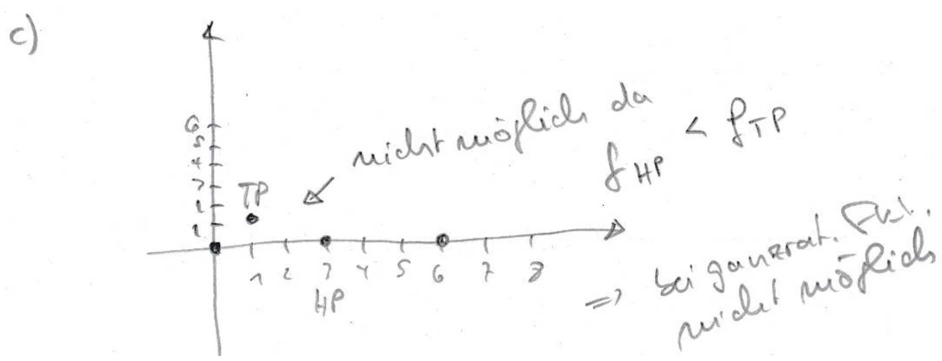
Lösung:

a) Kann nur gezeichnet werden, wenn man noch zwei Nullstellen in achsensymmetrischer Form im Intervall]-2 ; 2 [hinzufügt.

b) Kann nicht gezeichnet werden, da zwischen den Nullstellen die notwendigen Extrema fehlen.

c) Kann nicht gezeichnet werden, da der Funktionswert des HP kleiner ist als der Funktionswert des TP.

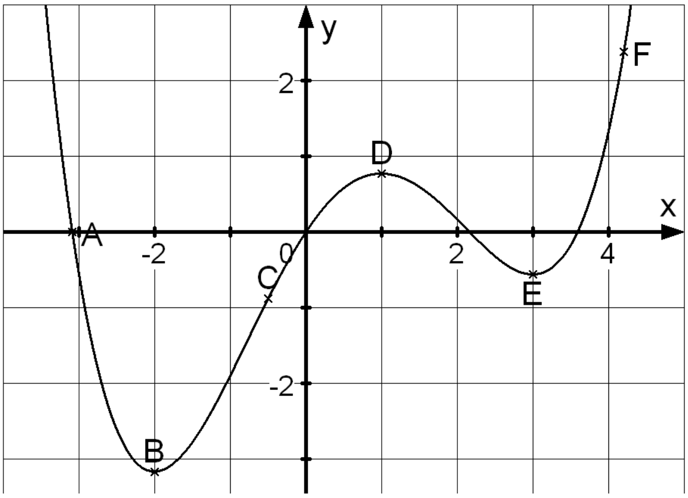




Teil 3:

Gegeben ist der Graph der Funktion f(x).

Tragen Sie in der Tabelle ein, ob $f(x)$, $f'(x)$ und $f''(x)$ in den markierten Punkten positiv (>0), negativ (<0) oder Null sind.



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
A			
C			
D			
F			

Lösung:

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
A	f(x) = 0	f'(x) < 0	f''(x) > 0
C	f(x) < 0	f'(x) > 0	f''(x) = 0
D	f(x) > 0	f'(x) = 0	f''(x) < 0
F	f(x) > 0	f'(x) > 0	f''(x) > 0

Teil 4:

Entscheiden Sie anhand der 2. Ableitung, ob der Extrempunkt P ein Hochpunkt (HP) oder Tiefpunkt (TP) des Graphen von f ist. a) $f(x) = x^2 + 6x + 5,\ P(-3\|-4)$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x,\ P(-2\|20)$ c) $f(x) = 0{,}75x^4 - x^3 - 3x^2,\ P(2\|-8)$	a) $f''(-3) =$___ HP ☐ TP ☐ b) $f''(-2) =$___ HP ☐ TP ☐ c) $f''(2) =$___ HP ☐ TP ☐

Lösung:

Entscheiden Sie anhand der 2. Ableitung, ob der Extrempunkt P ein Hochpunkt (HP) oder Tiefpunkt (TP) des Graphen von f ist. a) $f(x) = x^2 + 6x + 5,\ P(-3\|-4)$ b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x,\ P(-2\|20)$ c) $f(x) = 0{,}75x^4 - x^3 - 3x^2,\ P(2\|-8)$	a) $f''(-3) = 2$ HP ☐ TP ☑ b) $f''(-2) = -18$ HP ☑ TP ☐ c) $f''(2) = 18$ HP ☐ TP ☑

6	

ZUSATZAUFGABE:

Entscheiden Sie, ob die Aussagen zur Funktion f bzw. zu ihrem Graphen

(W)ahr oder (F)alsch sind.

- ⇨ **Erklärung der Entscheidung!!!**

Aussage 1: **Ist f streng monoton steigend im Intervall I, so ist f' negativ für alle x aus dem Intervall I.**

Lösung: **FALSCH – f'(x) = m ; wenn m > 0 => f steigt streng monoton => f'(x) > 0**

Aussage 2: **Ist $f'(2) < 0$, so ist die Funktion f für x = 2 monoton fallend.**

Lösung: **WAHR – f'(x) = m ; wenn f'(x) < 0 => f fällt streng monoton => m < 0**
