

**Thema: Gebrochen-rationale Funktionen
(Untersuchung & Graphen)**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:

Punkte:

Note:

Aufgabe 1 Untersuchung einer gebr.-rat. Funktion

14

 Gegeben ist die Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{2x-4}{x+3}$

Bestimmen Sie die folgende Werte:

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) Zähler- und Nennernullstellen | d) Definitionsmenge |
| b) Nullstellen und Polstellen der Funktion | e) Schnittpunkt mit der y-Achse |
| c) Asymptote | |

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Zähler	Nenner
$2x-4=0$	$x+3=0$
$x=2$	$x=-3$

$$\begin{aligned} \text{Nullstelle: } & x=2 \\ \text{Pol m VZW: } & x=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Asymptote: } & a(x)=2 \\ S_y & \left(0 \mid -\frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Untersuchung einer gebr.-rat. Funktion

18

 Gegeben ist die Funktionsvorschrift: $f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x^2+4x+3}$

Bestimmen Sie die folgende Werte:

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) Zähler- und Nennernullstellen | d) Definitionsmenge |
| b) Nullstellen und Polstellen der Funktion | e) Schnittpunkt mit der y-Achse |
| c) Asymptote | |

$$f(x) = \frac{2x^2-4x+2}{x^2+4x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -1\}$$

Zähler	Nenner
$2(x^2-2x+1)=0$	$x^2+4x+3=0$
$x=1(\text{doppelt})$	$x_1=-1 \quad x_2=-3$

$$\text{Nullstelle: } x=1(\text{doppelt})$$

$$\text{Pol m VZW: } x=-1$$

$$\text{Pol m VZW: } x=-3$$

$$\text{Asymptote: } a(x)=2$$

$$S_y \left(0 \mid \frac{2}{3} \right)$$

Aufgabe 3 Funktionsvorschrift einer gebrochen-rationalen Funktion

Erstellen Sie aus den gegebenen Eigenschaften die **Funktionsvorschrift** der gesuchten Funktion:

Das Schaubild einer gebrochen-rationalen Funktion hat eine Polstelle mit VZW bei $x = 5$, eine Gerade mit der Gleichung $y = 2$ ist die waagrechte Asymptote und der Punkt $P(6/12)$ liegt auf der Kurve.

$$\begin{aligned} \text{Herleitung: } f(6) &= 12 \rightarrow \frac{2 \cdot 6 + a}{6 - 5} = 12 \rightarrow \frac{12 + a}{1} = 12 \\ &\rightarrow 12 + a = 12 \rightarrow a = 0 \rightarrow f(x) = \frac{2x}{x - 5} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Beschreibung einer gebrochen-rationalen Funktion

Geben Sie die Beschreibung der Eigenschaften einer gebrochen-rationalen Funktion exakt an, damit die folgende Funktionsvorschrift eindeutig erstellt werden kann.

$$f(x) = \frac{6(x-1)^3(x+3)}{3(x+3)(x+2)^2(x-4)} \rightarrow f^*(x) = \frac{2(x-1)^3}{(x+2)^2(x-4)}$$

Die Funktion besitzt eine dreifache Nullstelle bei $x = 1$; eine Polstelle mit VZW bei $x = 4$ und eine Polstelle ohne VZW bei $x = -2$;

Die Asymptote hat die Gleichung $a(x) = 2$ und verläuft horizontal;

Zudem besitzt die Funktion noch eine Lücke bei $x = 3$

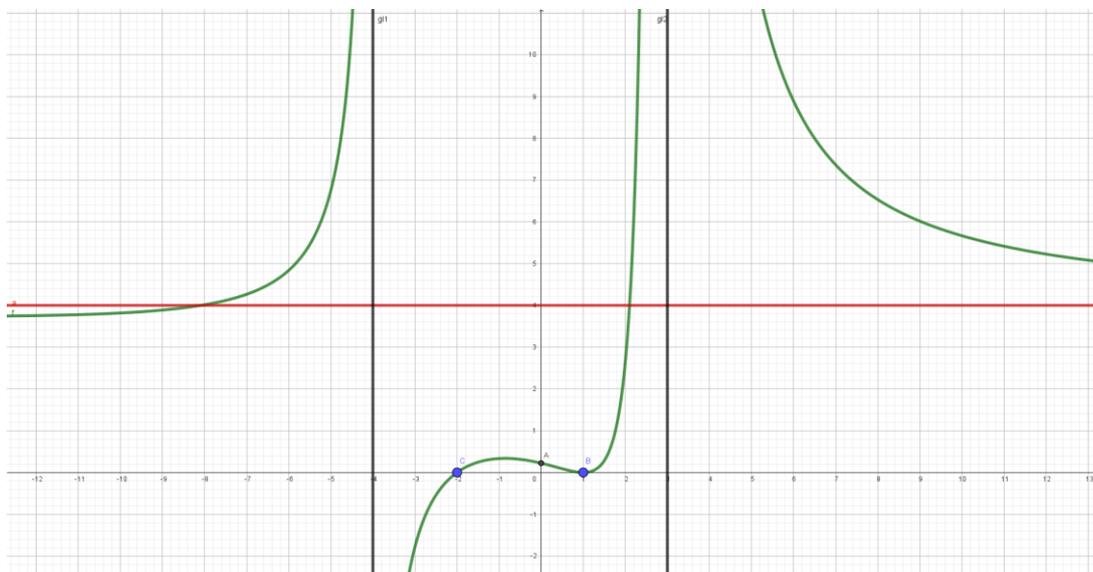
Aufgabe 5 Zeichnen der Funktion

Nach einer Untersuchung einer gebrochen-rationalen Funktion sind folgende Ergebnisse herausgekommen:

Asymptote: $a(x) = 4$ $S_y(0 / 0,22)$ Nullstellen: $x = 1$ (doppelt) und $x = -2$ (einfach)

Polstelle mit VZW bei $x = -4$ Polstelle ohne VZW bei $x = 3$

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion, die Polstellen und die Asymptote.



Aufgabe 6 Lücken bestimmen

18	
----	--

Ermitteln Sie bei den Funktionen $f^*(x)$, die Lücken und deren „Funktionswerte“.

a)
$$f(x) = \frac{(x-6)(x^2-9x+20)}{(x^2-8x+15)(x-4)}$$

c)
$$f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2-5x+6}$$

b)
$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2-22x-60}{x^2-x-6}$$

$$f(x) = \frac{(x-6)(x^2-9x+20)}{(x^2-8x+15)(x-4)} = \frac{(x-6)(x-4)(x-5)}{(x-3)(x-5)(x-4)}$$

$$f^*(x) = \frac{x-6}{x-3} \rightarrow L_1(4 \mid -2) \text{ und } L_2\left(5 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2-22x-60}{x^2-x-6} = \frac{2(x-3)(x+2)(x+5)}{(x+2)(x-3)}$$

$$f^*(x) = 2x+10 \rightarrow L_1(-2 \mid 6) \text{ und } L_2(3 \mid 16)$$

$$f(x) = \frac{x^2+2x-15}{x^2-5x+6} = \frac{(x+5)(x-3)}{(x-2)(x-3)} \rightarrow f^*(x) = \frac{x+5}{x-2} \rightarrow L(3 \mid 8)$$

Zusatzaufgabe:

5	
---	--

Berechnen Sie die Asymptote von $f(x) = \frac{2x^3+8x^2-22x-60}{x^2-x-6}$

$$(2x^3+8x^2-22x-60):(x^2-x-6) = 2x+10$$

$$\underline{-(2x^3-2x^2-12x)}$$

$$10x^2-10x-60$$

$$\underline{-(10x^2-10x-60)}$$

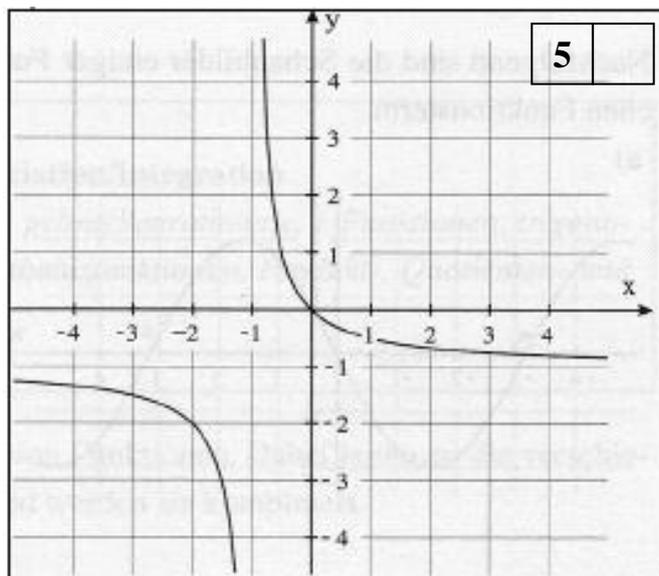
$$0$$

Aufgabe 7 Graphen analysieren

Gegeben sei der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion.

Bestimmen Sie die Eigenschaften anhand des Graphen und erstellen Sie die zugehörige Funktionsvorschrift.

- a) Asymptote
- b) Nullstellen
- c) Polstellen der Funktion
- d) Schnittpunkt mit der y-Achse
- e) Funktionsvorschrift:



5	
---	--

Asymptote: $a(x) = -1$

Nullstelle: $x = 0$

Sy (0 / 0)

Polstelle mit VZW: $x = -1$

$$f(x) = -\frac{x}{x+1}$$

Aufgabe 9 Fehleranalyse bei Rudi Knilch

10	
----	--

Rudi hat seine Probleme mit Mathematik – und betrachtet einige Lösungsversuche seines letzten Tests. Er kann sich die Fehler nicht erklären.

Zum Glück hat er ja Sie als Nachhilfe – und da können Sie ihm sicherlich helfen.

Welche Fehler hat Rudi jeweils gemacht?

Fehler 1:
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 4x + 5} = \frac{2x - 15}{-4x + 5} = \frac{2x - 15}{1x}$$

Kürzen von x^2 aus einer Summe/Differenz ist nicht erlaubt;

Punkt vor Strich beim Zusammenfassen im Nenner nicht beachtet

Fehler 2:
$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2-3} = \frac{x^2-9}{x^2-3} = 3$$

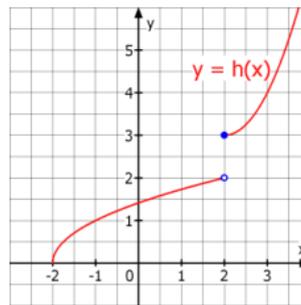
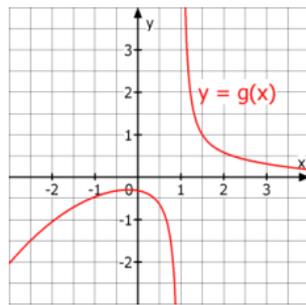
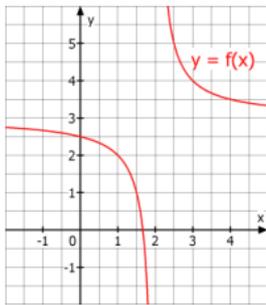
Falsches Ausmultiplizieren – Binomische Formel

Kürzen von x^2 aus einer Summe/Differenz ist nicht erlaubt;

Fehler 3:
$$f(x) = \frac{(x-4)^2}{x^2-16} \rightarrow \text{Polstelle bei } x = 4$$

Falsche Auswertung der Zähler- und Nennernullstelle(n) => Lücke bei $x = 4$ / Polstelle bei $x = -4$

Ordnen Sie den Funktionen ihre Polstelle zu:



Polstelle von

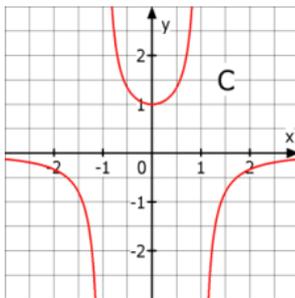
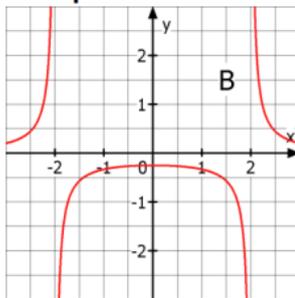
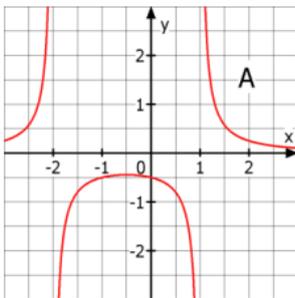
	f	g	h
x = 3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
y = 2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
x = 2	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
x = 1	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
y = 0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
x = -2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
keine	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Welche Aussagen zur Funktion f sind wahr, welche falsch?

- a) Hat f eine Polstelle an der Stelle 3, so hat der Graph von f eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $x = 3$.
- b) Hat f eine Polstelle bei x_0 , so gilt $f(x_0) = \infty$.
- c) Hat f eine Polstelle bei x_0 , so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.
- d) Hat f die Definitionslücke x_0 , so hat f an dieser Stelle eine Polstelle.

	Wahr	Falsch
a)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
c)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

Ordnen Sie den Graphen die Funktionsterme zu:



<input checked="" type="checkbox"/> C	$\frac{1}{1-x^2}$
<input checked="" type="checkbox"/> A	$\frac{1}{(x-1)(x+2)}$
<input type="checkbox"/>	$\frac{1}{x^2-1}$
<input checked="" type="checkbox"/> B	$\frac{1}{x^2-4}$

Ordnen Sie eine passende Funktion zu:

- a) $x = 2$ ist Nullstelle und $x = -1$ ist Polstelle der Funktion.
- b) Der Graph der Funktion hat senkrechte Asymptoten für $x = -2$ und $x = 1$.

<input checked="" type="checkbox"/> a	$f(x) = \frac{(x-2)}{(x+1)^2}$
<input type="checkbox"/>	$g(x) = \frac{(x+1)}{(x-2)}$
<input type="checkbox"/>	$h(x) = \frac{(x^2+1)}{(x+2)(x+1)}$
<input checked="" type="checkbox"/> b	$m(x) = \frac{(x+1)}{(x+2)(x-1)}$

f ist eine Funktion und für $x \rightarrow \infty$ gelte $f(x) \rightarrow 2$ aber $f(x) \neq 2$. Entscheiden Sie.

- a) Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.
- b) Der Graph von f hat die senkrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 2$.
- c) Geht man auf der x-Achse immer weiter nach rechts, so nähern sich die Funktionswerte immer mehr der 2 an.
- d) Es gilt dann $f(100) = 2$.

	Wahr	Falsch
a)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
c)	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d)	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>