11. Jgst.	8. Test	Datum: 08.04.2022
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ableitungen; Differentialquotient; Steigungsverhalten; Tangenten berechnen

Name:	
Punkte:	Note:

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

1.) Ableitung bestimmen mittels Differentialquotient

Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktionen

a) $f(x) = x^3$

b) $g(x) = 4x^2 - 3x$

mittels h-Methode und dem Differentialquotient.

$$f(x) = x^3$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)h}{h} = \lim_{h \to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

$$g(x) = 4x^2 - 3x$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[4(x+h)^2 - 3(x+h)\right] - \left(4x^2 - 3x\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 3x - 3h - 4x^2 + 3x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(8x + 4h - 3)h}{h} = \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 3) = 8x - 3$$

2.) Ableitungen bilden

Bilden Sie die 1. Ableitung der gegebenen Funktionen:

a) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - 6x^2 + 2x + 3$

b) $f(t) = \frac{2}{5}x^3 - 6t^2 + 2x + 3t$

c) $f(x) = \left(x^3 - 3x\right)^2$

d) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

e) $f(x) = \sqrt{x^5}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x}$

Lösung:

a) $f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - 12x + 2$

b) $f'(t) = -12t + 3$

c) $f(x) = (x^3 - 3x)^2 = x^6 - 6x^4 + 9x^2 \rightarrow f'(x) = 6x^5 - 24x^3 + 18x$

d) $f(x) = \frac{2}{x^3} = 2x^{-3} \rightarrow f'(x) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

e) $f(x) = \sqrt{x^5} = x^{\frac{5}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$

f) $f(x) = \frac{x^2+2}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{2}{x} = x + 2x^{-1} \rightarrow f'(x) = 1 - 2x^{-2} = 1 - \frac{2}{x^2}$

3.) Steigungen und Steigungsstellen

a) Welche Steigung besitzt die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x$ an der Stelle x = 3?

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 2 \rightarrow f'(3) = \frac{1}{2}\cdot 3 - 2 = -\frac{1}{2} = m$$

b) An welchen beiden Stellen x besitzt die Funktion $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2$ die Steigung m = 2,5?

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x = 2{,}5 \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2{,}5 = 0 \rightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = 2 \pm 3 \rightarrow x_1 = -1 \quad und \quad x_2 = 5$$

4.) Tangenten berechnen und Monotonieintervalle bestimmen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2$

a) Berechnen Sie die Tangente an die Funktion an der Stelle x = 2.

$$f(2) = \frac{1}{2}\cdot 8 - 2\cdot 4 = -4$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x \rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}\cdot 4 - 4\cdot 2 = -2$$

$$\left.\begin{aligned} -4 &= (-2)\cdot 2 + b \\ b &= 0 \\ t(x) &= -2x \end{aligned}\right.$$

b) Ermitteln Sie die Monotonieintervalle der Funktion.

$$f'(x) \quad = \quad \frac{3}{2}x^2 - 4x = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{3}{2}x - 4\right)x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

$$I_1 = \left]-\infty\,;0\right[\quad monoton\ steigend$$

$$I_2 = \left]0\,;\frac{8}{3}\right[\quad monoton\ \ fallend$$

$$I_3 = \left]\frac{8}{3}\ ;\infty\right[\quad monoton\ steigend$$