11. Jgst.	3. Kursarbeit	Datum: 18.03.2022
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Gebrochen rationale Funktionen; Differentialquotient (ganzrational)

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) Gebrochen-rationale Funktionen untersuchen

Untersuchen Sie die zwei folgenden Funktionen hinsichtlich folgender Eigenschaften: ***Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptote und S_y und fertigen Sie jeweils eine Skizze der Funktion an.***

a) $$g(x) = \frac{4x-8}{2x^2-8} = \frac{4(x-2)}{2(x-2)(x+2)} \rightarrow g^*(x) = \frac{2}{(x+2)}$$

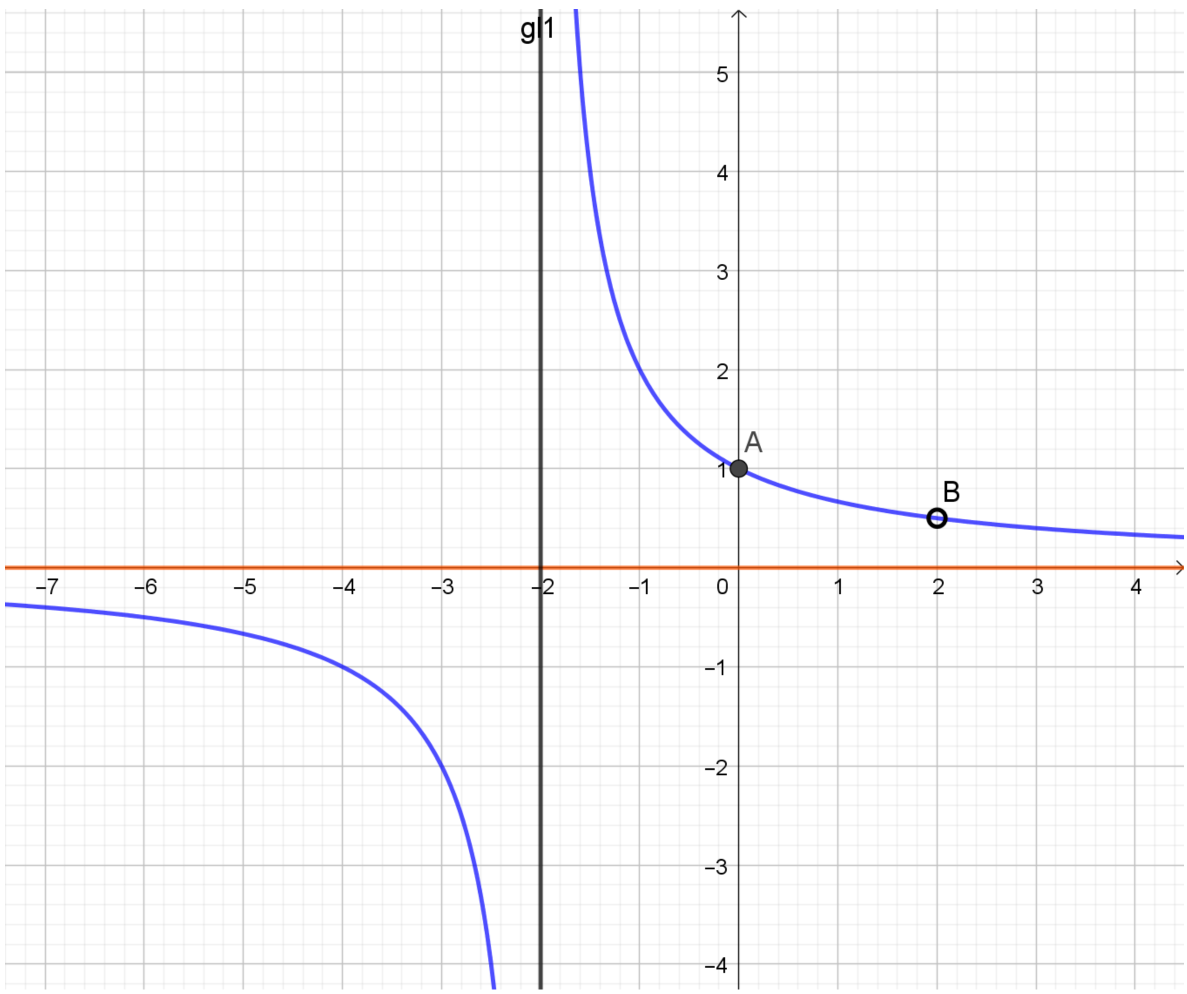
Definitionsmenge: $D = \Re \setminus \{\pm 2\}$

Zähler: $x = 2$ Nenner: $x = \pm 2$

⇨ Keine Nullstelle Pol mVZW bei x = -2

⇨ Lücke L (2 / 0,5) Sy (0 / 1)

⇨ Asymptote: a(x) = 0 [x-Achse]



b) $f(x) = \frac{3x^2-12}{(x+1)(x-4)} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-4)}$

Definitionsmenge: $D = \Re \setminus \{-1;4\}$

Zähler: $x=2 \quad und \quad x=-2$

Nenner: $x=-1 \quad und \quad x=4$

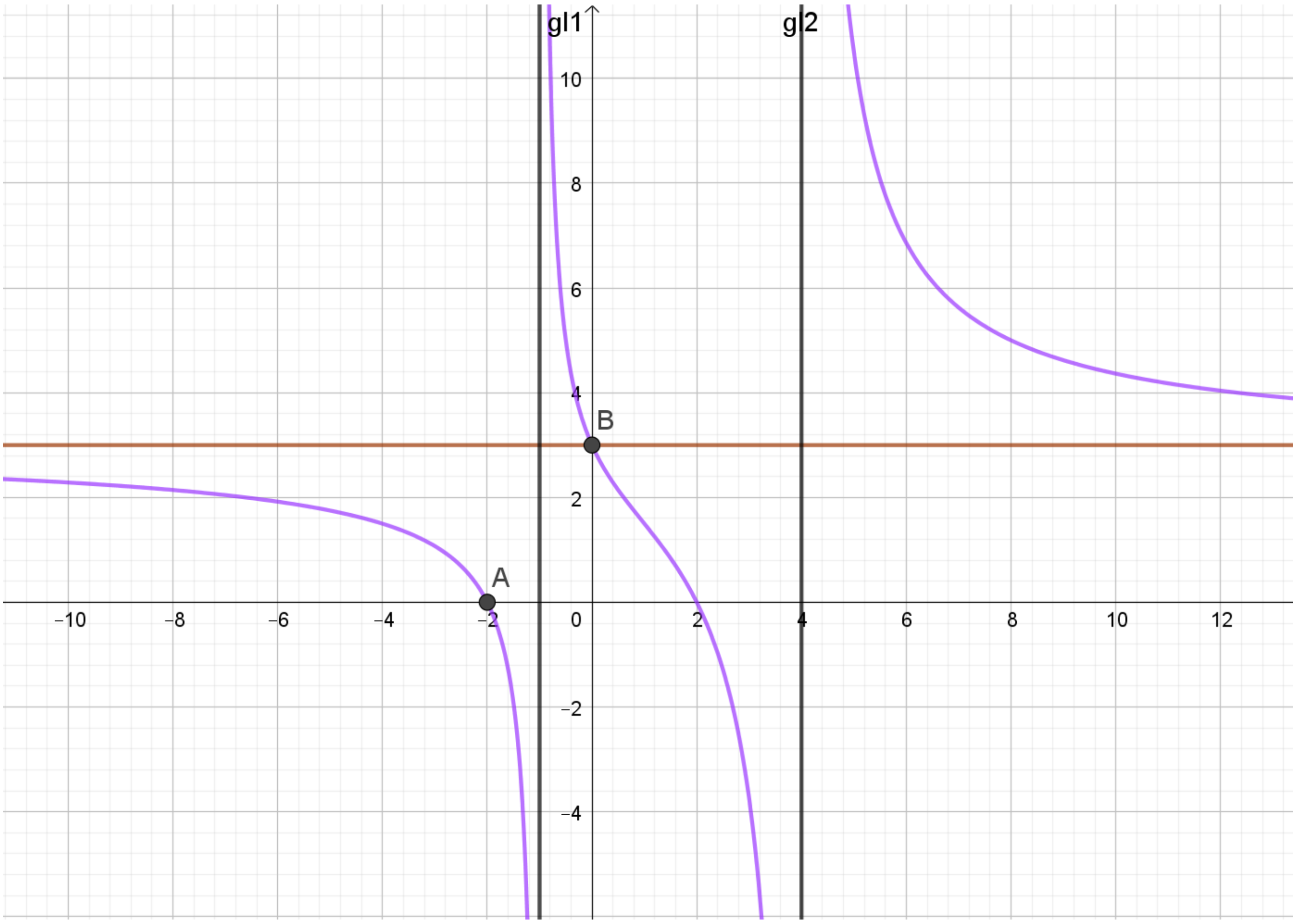
⇨ Nullstelle: $x=2 \quad und \quad x=-2$

Pol mVZW bei $x=-1 \quad und \quad x=4$

⇨ Lücke: keine

Sy (0 / 3)

⇨ Asymptote: a(x) = 3 [Parallele zur x-Achse]



2.) Näherung mit Rechnen und Beweis durch h-Methode
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion an der Unstetigkeitsstelle:

$f(x) = \frac{x+2}{x-5} \quad für \quad x = ???$

$\lim_{x \to 5} f(x) \to -\infty$

a) Berechnen: von links:

x	**4,9**	**4,99**	**4,999**	$x \to 5$
$f(x) = \frac{x+2}{x-5}$	$f(4{,}9) = \frac{6{,}9}{-0{,}1} = -69$	$f(4{,}99) = \frac{6{,}99}{-0{,}01} = -699$	$f(4{,}999) = \frac{6{,}999}{-0{,}001} = -6999$	

b) Nachweis durch h-Methode (nur von rechts)

$$\lim_{\substack{x \to 5+h \\ h \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 5+h \\ h \to 0}} \frac{x+2}{x-5} = \lim_{h \to 0} \frac{5+h+2}{5+h-5} = \lim_{h \to 0} \frac{7+h}{h} = \frac{7}{\lim\limits_{h \to 0} h} \to \infty$$

3.) Punktproben

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{2x-4}$

a) Prüfen Sie, ob die Punkte **A(-2/-8)** und **B(3/5)** auf der Funktion f liegen?

b) Vervollständigen Sie die Koordinaten der Punkte, damit sie auf der Funktion f liegen: **C(6/y)** und **D(x/5,4)**.

$$f(-2) = \frac{(-2)^2+(-2)-2}{2\cdot(-2)-4} = \frac{0}{-8} = 0 \neq (-8) \to A \notin f$$

$$f(3) = \frac{3^2+3-2}{2\cdot 3-4} = \frac{10}{2} = 5 \to B \in f$$

$$f(6) = \frac{6^2+6-2}{2\cdot 6-4} = \frac{40}{8} = 5 \to C(6 \mid 5)$$

$$5{,}4 = \frac{x^2+x-2}{2x-4} \xrightarrow{\cdot(2x-4)} 5{,}4\cdot(2x-4) = x^2+x-2 \to 10{,}8x-21{,}6 = x^2+x-2$$

$$\to 0 = x^2-9{,}8x+19{,}6 \to x=7 \quad und \quad x=2{,}8 \xrightarrow{\text{Probe}} L=\{7\}$$

4.) Gebrochen-rationale Funktionen rekonstruieren

Geben Sie je eine gebrochen-rationale Funktionsvorschrift an,
deren Graph folgende Eigenschaften besitzt.

a) Pol mVZW an der Stelle **x = 3**, Nullstelle bei **x = - 1** und eine Asymptote mit **a(x) = - 2**.

b) Pol oVZW an der Stelle **x = - 2** und eine einfache Nullstelle bei **x = 1**.

c) Pol an der Stelle **x = - 4**, behebbare Lücke bei **x = 3**, eine dreifache Nullstelle bei **x = 5**, Asymptote **a(x) = 2,5** und Zählergrad: **n = 4**

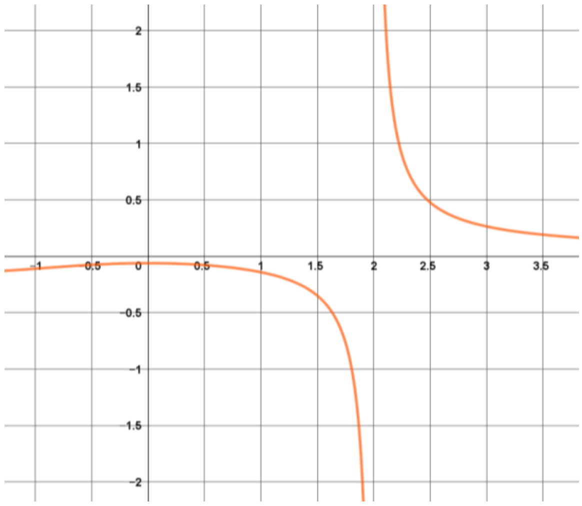
$$f(x) = (-2)\cdot\frac{x+1}{x-3} \qquad f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2} \qquad f(x) = \frac{2{,}5\cdot(x-5)^3(x-3)}{x^2(x+4)(x-3)}$$

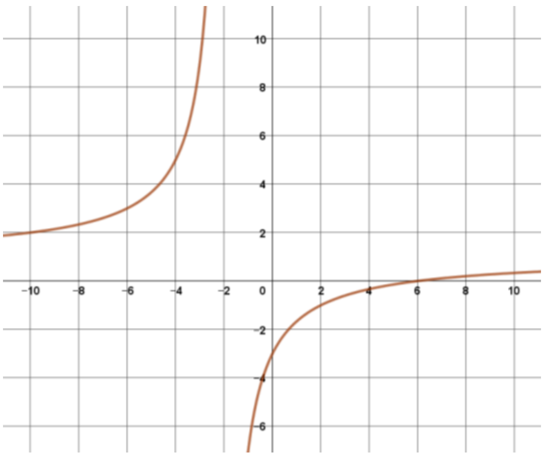
5.) **Zuordnung:**

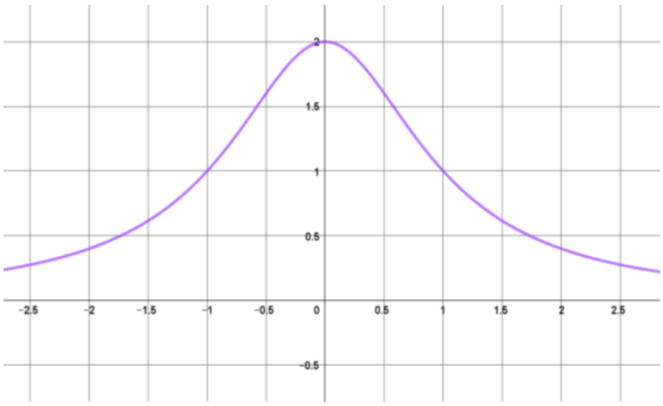
Ordnen Sie vier der gegebenen Funktionsvorschriften den Graphen zu und geben Sie ***drei Gründe*** für die korrekte Zuordnung an:

A $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$ **B** $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-5}$ **C** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^3-16}$

D $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$ **E** $f(x) = \dfrac{2x-4}{x^2-4}$ **F** $f(x) = \dfrac{x-6}{x+2}$





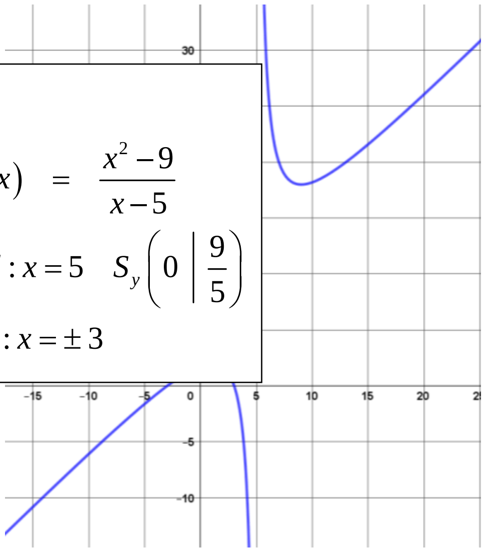


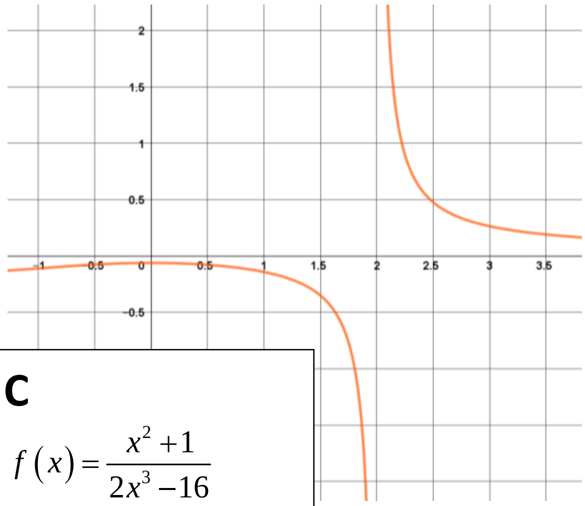
B

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-5}$$

$Pol: x=5 \quad S_y\left(0 \,\middle|\, \frac{9}{5}\right)$

$NS: x = \pm 3$



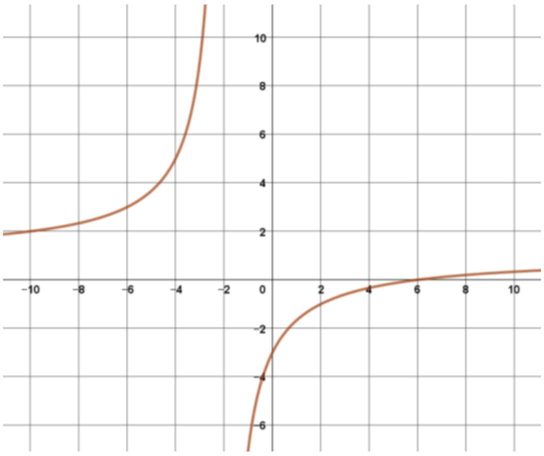


C

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x^3-16}$$

$Pol: x=2 \quad NS: keine$

$S_y\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{16}\right)$



F

$$f(x) = \frac{x-6}{x+2}$$

$Pol: x=-2$

$NS: x=6$

$S_y(0 \mid -3)$

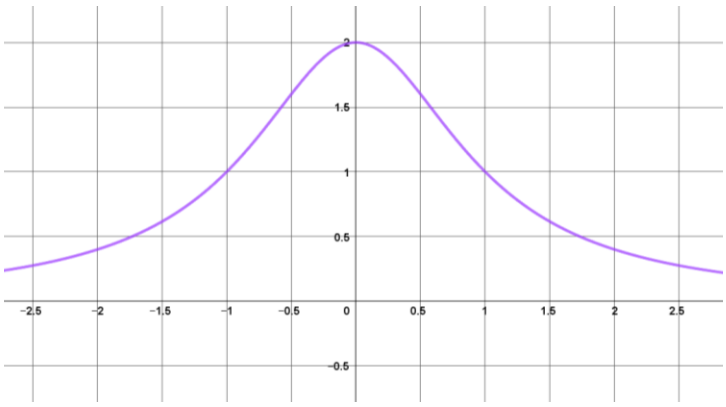
D

$$f(x) = \frac{2}{x^2+1}$$

$Pol: keiner$

$NS: keine$

$S_y(0 \mid 2)$



Nicht zuzuordnen:

A

$$f(x) = \frac{x-4}{x+1}$$

$Pol: x=-1$

$NS: x=4$

$S_y(0 \mid -4)$

E

$$f(x) = \frac{2x-4}{x^2-4}$$

$Pol: x=-2 \quad NS: keine$

$S_y(0 \mid 1) \quad L\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$

6.) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

a) $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^3+6}$

b) $g(x) = \frac{x^2+2x}{4x^2+3}$

c) $h(x) = \frac{6x^3+3x}{2x^2-1}$

Asymptoten:

$$f(x) = \frac{x^2-4x}{x^3+6} \xrightarrow{Zählergrad<Nennergrad} a(x)=0 \quad [x-Achse]$$

$$g(x) = \frac{x^2+2x}{4x^2+3} \xrightarrow{Zählergrad=Nennergrad} a(x)=\frac{1}{4} \quad [Parallele\ zur\ x-Achse]$$

6x^3+3x	:	2x^2-1

```
(6x^3+3x) : (2x^2-1)  =  3x + (6x)/(2x^2-1)
-(6x^3-3x)
      -(6x)
```

Quelle: https://www.matheretter.de/rechner/polynomdivision

7.) Zuordnung: Frage - Antwort

Tragen Sie in der mittleren Spalte bei jeder Aufgabenstellung den korrekten Lösungsbuchstaben ein. Beachten Sie: Es gibt mehr Lösungsbuchstaben als Aufgaben und jeder Lösungsbuchstabe dürfte mehrmals verwendet werden.

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \quad und \quad f^*(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

mit maximaler Definitionsmenge **D**

1 In der Definitionsmenge **D** sind folgende Zahlen ***nicht*** enthalten:
2 Die Funktion f hat die Nullstelle(n) x =
3 Die Funktion f hat die Polstelle x =
4 Die Funktion f hat die behebbare Definitionslücke x =
5 Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung a(x) =
6 Der Grenzwert von f(x) für x gegen 2 hat den Wert
7 Die Anzahl der Schnittpunkte zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung y = x beträgt

A	**1 und 2**
B	**1**
C	**0 und 2**
D	**– 2 und 2**
E	**2**
F	**– 2**
G	**28**
H	**– 1**
I	$\frac{1}{4}$ **und 1**
J	**-3,5**
K	$\frac{1}{4}$
L	**4**
M	**0**

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \quad und \quad f^*(x)=\frac{x-1}{x+2}$$

$D=\Re\setminus\{\pm 2\}$

$Z\ddot{a}hler: \quad x=1 \quad und \quad x=2 \qquad Nenner: \quad x=2 \quad und \quad x=-2$

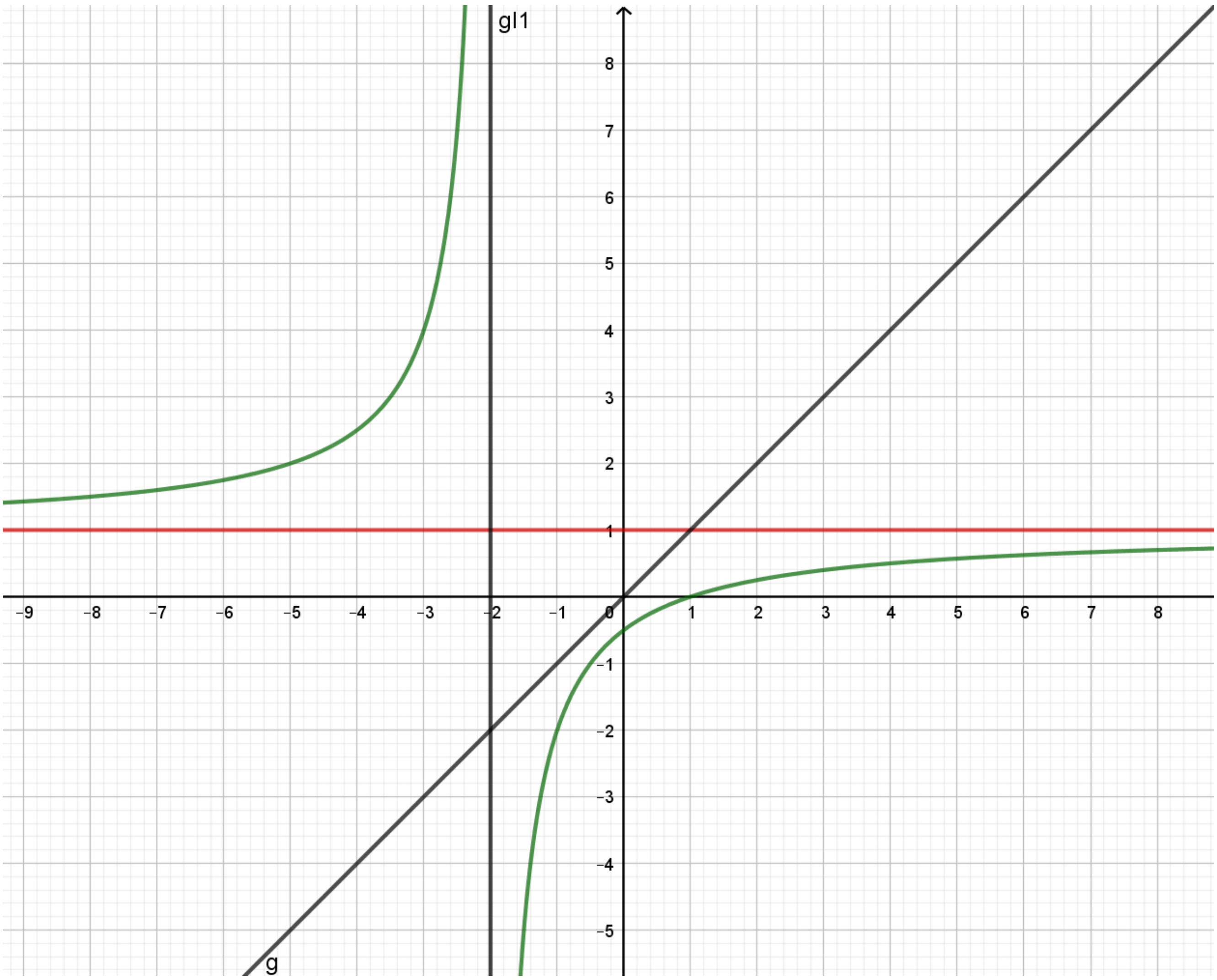
$Nullstelle: \quad x=1 \qquad Polstelle[mVZW]: \quad x=-2$

$$L\ddot{u}cke: \quad L\left(2 \,\middle|\, \frac{1}{4}\right) \qquad S_y\left(0 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\right) \qquad Asymptote: \quad a(x)=1$$

$Schnittstellen:$

$$f^*(x)=x \;\rightarrow\; \frac{x-1}{x+2}=x \;\xrightarrow{\cdot(x+2)}\; x-1=x\cdot(x+2) \;\rightarrow\; x-1=x^2+2x$$

$$\rightarrow\; 0=x^2+x+1 \;\rightarrow\; x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} \quad keine\ L\ddot{o}sung$$



Gegeben ist die Funktion

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4} \quad und \quad f^*(x)= \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

mit maximaler Definitionsmenge D

1	**In der Definitionsmenge D sind folgende Zahlen *nicht* enthalten:**	**D**
2	**Die Funktion f hat die Nullstelle(n) x =**	**B**
3	**Die Funktion f hat die Polstelle x =**	**F**
4	**Die Funktion f hat die behebbare Definitionslücke x =**	**E**
5	**Der Graph von f hat die waagrechte Asymptote mit der Gleichung a(x) =**	**B**
6	**Der Grenzwert von f(x) für x gegen 2 hat den Wert**	**K**
7	**Die Anzahl der Schnittpunkte zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung y = x beträgt**	**M**

A	**1 und 2**
B	**1**
C	**0 und 2**
D	**– 2 und 2**
E	**2**
F	**– 2**
G	**28**
H	**– 1**
I	$\frac{1}{4}$ **und 1**
J	**-3,5**
K	$\frac{1}{4}$
L	**4**
M	**0**

ZUSATZAUFGABE – Wählen Sie zwischen Option 1 und 2:

Option 1: **Gebrochen-rationale Funktionen mit Parameter**

Gegeben ist die Funktion $f_t(x)=\frac{x}{tx^2-tx+1} \quad mit \quad t\in\Re\setminus\{0\}$

Für welchen Wert von **t** besitzt die Funktion genau eine Polstelle?

Anmerkung: Denken Sie an die Diskriminante!

$$\text{Diskriminante:}\quad D=t^2-4t=0 \quad\rightarrow\quad (t-4)t=0 \quad\xrightarrow[\text{nicht definiert}]{t=0}\quad t=4$$

Option 2: **Differentialquotient**

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = 3x^2$

mit Hilfe des Differentialquotienten bzw. mit der h-Methode.

$$f(x) = 3x^2 \quad\rightarrow\quad f(x+h) = 3(x+h)^2$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(x^2+2hx+h^2)-3x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6hx+3h^2-3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(6x+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+3h) \quad\rightarrow\quad 6x = f'(x)$$