11. Jgst.	2. Kursarbeit	Datum: 10.12.2021
Klasse: GY 21b	Fach: Mathematik (Kernfach)	

Thema: Ganzrationale Funktionen:
Symmetrie; Schnitt mit KO-Achsen; etc

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

1.) **Bestimmen Sie rechnerisch die Lösungen folgender Gleichungen:**

a) $7x \cdot (2x-8) = 0$ b) $(x+3)\cdot(x-2) = 0$

c) $\frac{1}{3}x^2 + 10 = 22$ d) $5x^2 + 25x = x^2 - 3x$

Lösung:

a) **x = 0 und x = 4** **b)** **x = - 3 und x = 2**
c) **x = +/- 6** **d)** **x = 0 und x = - 7**

2.) **Welche Zahlen sind Lösung der Gleichung?**

a) $(x+2)^2 = 25$	**a) 3 und -7**
b) $(3x-6)^2 = 9$	**b) 1 und 3**

3.) **Geben Sie die Werte von a, b und c an, wenn man die Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ schreibt.**

a) $2x^2 - 2x + 3 = 0$ **b)** $3x^2 + x - 2 = 0$

Lösung: **a = 2; b = -2; c = 3** **a = 3; b = 1; c = -2**

4.) **Welche Antwort ist richtig? Kreuzen Sie an.**

Die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 6x - 5 = 0$ **können mithilfe der folgenden Lösungsformel bestimmt werden:**

A: $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-36+40}}{4}$	B: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+40}}{2}$	**D**
C: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-40}}{4}$	D: $x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+40}}{4}$	

5.) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Gleichungen:

a) $x^2+4x=21$ b) $8x+8=-2x^2$ c) $\frac{1}{3}x^2+x-\frac{10}{3}=0$ d) $2x^3+4x^2=16x$

Lösung:

$$x^2+4x=21 \rightarrow x^2+4x-21=0 \rightarrow x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot(-21)}}{2\cdot1}$$

$$\rightarrow x_{1/2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2} \rightarrow x_{1/2}=\frac{-4\pm10}{2} \rightarrow x_1=3 \wedge x_2=-7$$

$$8x+8=-2x^2 \rightarrow 2x^2+8x+8=0 \rightarrow x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot2\cdot8}}{2\cdot2}$$

$$\rightarrow x_{1/2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{4} \rightarrow x_{1/2}=\frac{-8\pm0}{4} \rightarrow x=-2\left[doppelt\right]$$

$$\frac{1}{3}x^2+x-\frac{10}{3}=0 \xrightarrow{\cdot 3} x^2+3x-10=0 \rightarrow x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot1\cdot(-10)}}{2\cdot1}$$

$$\rightarrow x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2} \rightarrow x_{1/2}=\frac{-3\pm7}{2} \rightarrow x_1=2 \wedge x_2=-5$$

$$2x^3+4x^2=16x \rightarrow \left(2x^2+4x-16\right)x=0 \xrightarrow{x_1=0} x_{2/3}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot2\cdot(-16)}}{2\cdot2}$$

$$\rightarrow x_{2/3}=\frac{-4\pm\sqrt{16+128}}{4} \rightarrow x_{2/3}=\frac{-4\pm12}{4} \rightarrow x_1=0 \wedge x_2=2 \wedge x_3=-4$$

6.) Textaufgaben

a) Subtrahiert man vom fünffachen Quadrat einer Zahl das Zehnfache der gesuchten Zahl, so erhält man als Ergebnis Null. Wie heißen die beiden möglichen Zahlen?

Lösung:

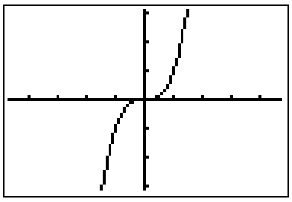
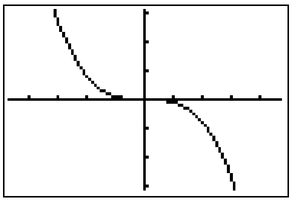
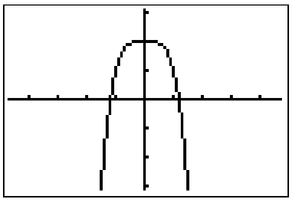
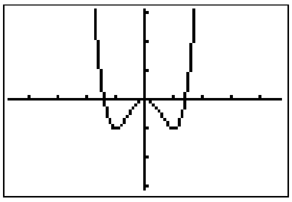
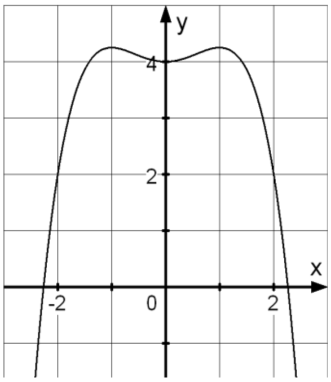
$$gesucht: \ Zahl\ x \xrightarrow{Ansatz} 5x^2-10x=0 \rightarrow (5x-10)x=0 \rightarrow x_1=0 \vee x_2=2$$

b) Ein Quader mit quadratischer Grundfläche hat eine Höhe von 3cm und ein Volumen von 108cm^3. Wie lang ist eine Kante der Grundfläche?

Lösung:

$$gesucht: \ Kantenlänge\ x \xrightarrow{Ansatz} x^2\cdot3=108 \rightarrow x^2=36 \rightarrow x_1=6 \ \left[\vee \ x_2=-6\right]$$

7.) Bearbeiten Sie die folgenden Fragestellungen und kreuzen Sie die gewünschten Lösungen an:

Welche der Aussagen sind wahr, welche falsch? a) Jede quadratische Gleichung hat mindestens eine Lösung. b) Enthält die Gleichung einen Term mit x^4 , so löst man die Gleichung durch Substitution. c) Die Gleichung $x^3 - 2x + 5 = 0$ hat mindestens eine Lösung.	**Wahr Falsch** ☐ **X** ☐ **X** **X** ☐
Welchen Grad hat die ganzrationale Funktion? a) $f(x) = 4x^5 + 3x^2 + 9$ b) $f(x) = x^3 + 3x^5 - 7x$ c) $f(x) = 5(x^2)^3 + 3(x^3)^2 + 9$ d) $f(x) = (3x^2 - 4)^5$	a) **n = 5** b) **n = 5** c) **n = 6** d) **n = 10**
Ordnen Sie richtig zu und bestimmen Sie die Art der Symmetrie: A  B  C  D 	**C** $-x^4 + 2$ **B** $-0{,}1x^3$ **A** x^3 **D** $x^4 - 2x^2$
Welche der Aussagen sind aufgrund des Graphen wahr, welche falsch? A: Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse. B: Im Funktionsterm von f kommen nur ungerade Exponenten vor. C: Der Grad der Funktion ist gerade. D: Der Grad der Funktion ist mindestens 4.  	**Wahr Falsch** A **X** ☐ B ☐ **X** C **X** ☐ D **X** ☐
Entscheiden Sie, welche Aussagen zur Funktion f richtig sind? $$f(x) = (x-2) \cdot (x^2+1)$$ A: f hat die Nullstellen -1, 1 und 2. B: f hat als einzige Nullstelle $x = 2$. C: f ist achsensymmetrisch. D: f ist auch $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$.	Richtig ist A ☐ B **X** C ☐ D **X**

8.) **Ganzrationale Funktionen bestimmen**

a) Eine ganzrationale Funktion sei durch folgende Koeffizienten gegeben:

a_4 = - 3 **a_3 = 1** **a_2 = - 5** **a_1 = 2** **a_0 = - 8**

Erstellen Sie die Funktionsvorschrift als Polynomfunktion.

Lösung: $$f(x) = -3x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 8$$

b) Ermitteln Sie die Funktionsvorschrift, wenn die Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ durch folgende Punkte festgelegt wird: Q(1/-1) und T(4/5)

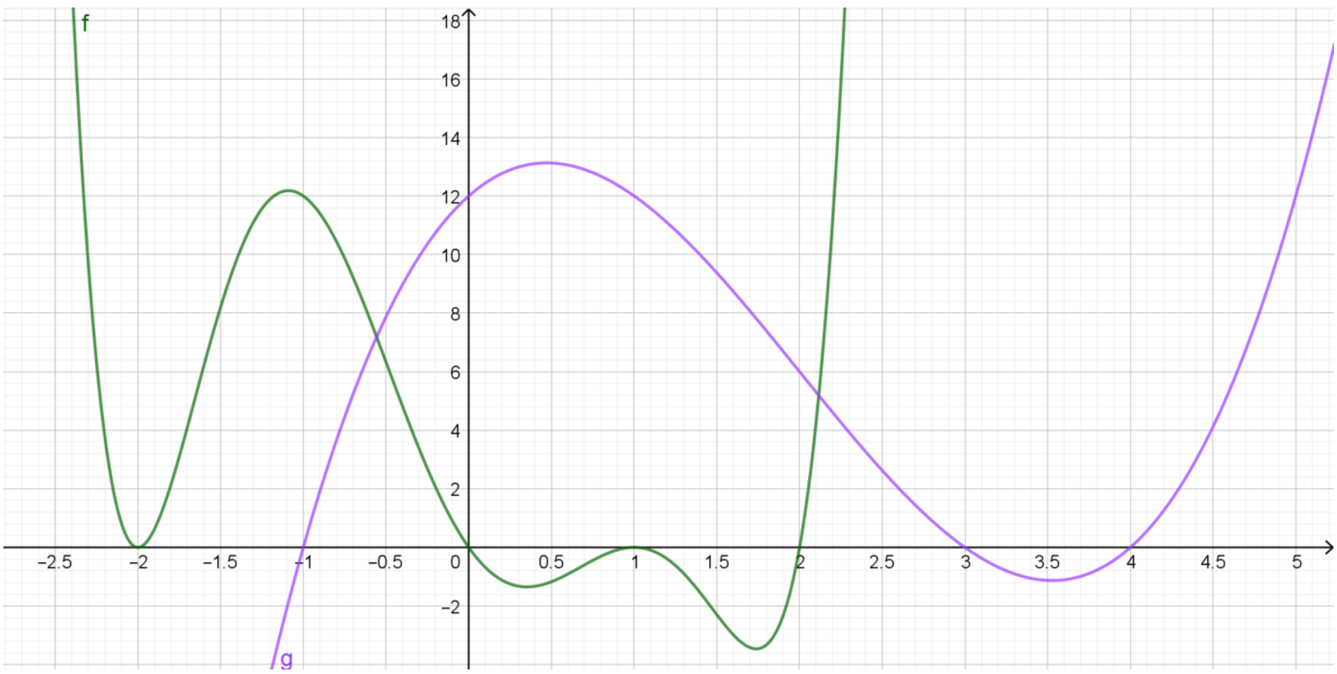
Lösung:

$$f(x) = x^2 + bx + c \xrightarrow[c=1]{b=-3} f(x) = x^2 - 3x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{einsetzen}]{Q(1\,|\,-1)} f(1) = 1 + b + c = -1 \\ \xrightarrow[\text{einsetzen}]{T(4\,|\,5)} f(4) = 16 + 4b + c = 5 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Additionsverfahren}} \begin{array}{l} 15 + 3b = 6 \\ b = -3 \wedge c = 1 \end{array}$$

c) Gegeben sind zwei Graphen

Ermitteln sie die Funktionsvorschrift in Linearfaktoren.



Lösung:

$$f(x) = x \cdot (x+2)^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)$$

$$g(x) = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$$

9.) Punktproben und Ermittlung von Funktionstermen

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3x^2 + x - 2$

a) Prüfen Sie, ob die Punkte A(-2/8) und B(3/25) auf der Funktion liegen?

b) Vervollständigen Sie die Koordinaten der Punkte, damit diese auf der Funktion liegen: C(8/y) und D(x/50).

Lösung:

$$f(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$Punktprobe\ A(-2 \mid 8): \quad f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 2 = 8 \rightarrow A \in f(x)$$

$$Punktprobe\ B(3 \mid 25): \quad f(3) = 3 \cdot 3^2 + 3 - 2 = 28 \neq 25 \rightarrow B \notin f(x)$$

$$Vervollständigung:$$

$$C(8 \mid y): \quad f(8) = 3 \cdot 8^2 + 8 - 2 = 198 \rightarrow C(8 \mid 198)$$

$$D(x \mid 50): \quad 50 = 3x^2 + x - 2 \rightarrow 3x^2 + x - 52 = 0$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 3 \cdot (-52)}}{2 \cdot 3} \rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 624}}{6}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{-1 \pm 25}{6} \rightarrow x_1 = 4 \wedge x_2 = -\frac{13}{3} \rightarrow C_1(4 \mid 50) \vee C_2\left(-\frac{13}{3} \,\middle|\, 50\right)$$

10.) Schnitte und Schnittpunkte

Gegeben seien die Gerade mit der Funktionsvorschrift $2x + y = 10$ und die beiden Parabeln $f(x) = x^2 - 4x + 2$ und $g(x) = -x^2 + 4x + 2$

Zeigen Sie, dass sich die drei Funktionen paarweise jeweils in zwei Punkten schneiden.

Ermitteln Sie die Schnittpunkte.

$$f(x) = x^2 - 4x + 2 \quad und \quad 2x + y = 10$$

$$\rightarrow \; y = 10 - 2x \xrightarrow[\text{mit } f(x)]{\text{gleichsetzen}} 10 - 2x = x^2 - 4x + 2 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\rightarrow \; x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{2 \pm 6}{2}$$

$$\rightarrow \; x_1 = 4 \;\wedge\; x_2 = -2 \xrightarrow[\text{in Gerade}]{\text{einsetzen}} y_1 = 2 \;\wedge\; y_2 = 14 \;\rightarrow\; S_1(4 \mid 2) \;\wedge\; S_2(-2 \mid 14)$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + 2 \quad und \quad 2x + y = 10$$

$$\rightarrow \; y = 10 - 2x \xrightarrow[\text{mit } g(x)]{\text{gleichsetzen}} 10 - 2x = -x^2 + 4x + 2 \;\rightarrow\; -x^2 + 6x - 8 = 0$$

$$\rightarrow \; x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$

$$\rightarrow \; x_1 = 4 \;\wedge\; x_2 = 2 \xrightarrow[\text{in Gerade}]{\text{einsetzen}} y_1 = 2 \;\wedge\; y_2 = 6 \;\rightarrow\; S_1(4 \mid 2) \;\wedge\; S_2(2 \mid 6)$$

$$g(x) = -x^2 + 4x + 2 \quad und \quad f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$\xrightarrow[g(x) \text{ mit } f(x)]{\text{gleichsetzen}} -x^2 + 4x + 2 = x^2 - 4x + 2 \;\rightarrow\; 2x^2 - 8x = 0$$

$$\rightarrow \; (2x - 8)x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0 \;\wedge\; x_2 = 4$$

$$\xrightarrow[\text{in } f(x)]{\text{einsetzen}} y_1 = 2 \;\wedge\; y_2 = 2 \;\rightarrow\; S_1(0 \mid 2) \;\wedge\; S_2(4 \mid 2)$$