12. Jgst.	3. Kursarbeit	Datum: 04.03.2022
Kurs 12/2	Fach: Mathematik (Leistungsfach)	

Thema: **Integral- und Differentialrechnung; K-Disk (gebr.-rat. Funktion)**

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Name:	
Punkte:	Note:

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die *Menge* der Stammfunktionen

12	

a) $\int (3x+4)^2\,dx \quad =$

b) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\,du \quad =$

c) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\,da \quad =$

d) $\int x^{\pi} \cdot a^2 \cdot u\,dx \quad =$

Aufgabe 2: **Rekonstruktion mal anders – Bestimmen Sie unter Beachtung der Zusatzbedingungen die entsprechende Stammfunktion:**

12	

a) $f(-2)=-8 \qquad f'(2)=8 \qquad f''(x)=4x$

b) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Ursprung, hat bei x = 1 ein Maximum und bei x = 2 eine Wendestelle. Sie schließt mit der x-Achse über dem Intervall [0 ; 2] eine Fläche vom Inhalt 6 ein. Wie heißt die zugehörige Funktionsgleichung?

Aufgabe 3: **Integral und Scharparameter**

16	

a) Bestimmen Sie die Grenzen des Integrals: $\int_b^{2b} 2x^2 dx \quad = \quad \frac{896}{3}$

b) Ermitteln Sie die Werte des Parameters k mit k>0: $\int_0^k \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx \quad = \quad \frac{2}{3}k^2$

c) Gegeben ist die Funktion $f_t(x) \quad = \quad tx^2-4tx \quad mit\; t>0$.
Bestimmen Sie t so, dass die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt $A \quad = \quad \frac{16}{3}$ besitzt.

Aufgabe 4: Stammfunktion verkleidet als Textaufgabe

10

Ein auf Riff gelaufener zylinderförmiger Tank verliert Rohöl durch ein Leck, wobei ein kreisförmiger Ölteppich entsteht. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit kann funktional in etwa gemessen werden durch: $\frac{df(t)}{dt} = \frac{8}{\sqrt{t}}$ $\quad mit\ t > 1$, $f(t)$ ist hierbei der Radius des Ölteppichs in Metern nach t Minuten.

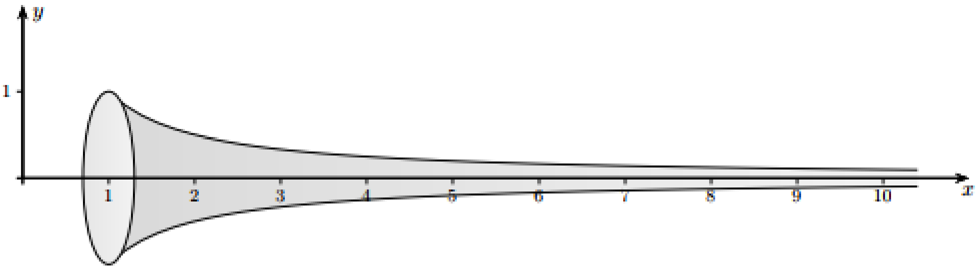
Nach einer Minute beträgt der Radius bereits 15 m.

a) Welchen Radius muss man nach 49 Minuten erwarten?
b) Nach welcher Zeit würde der Ölteppich einen Radius von 100 m besitzen?

Aufgabe 5: Uneigentliches Integral und ein Paradoxon
Die Torricelli-Trompete

12

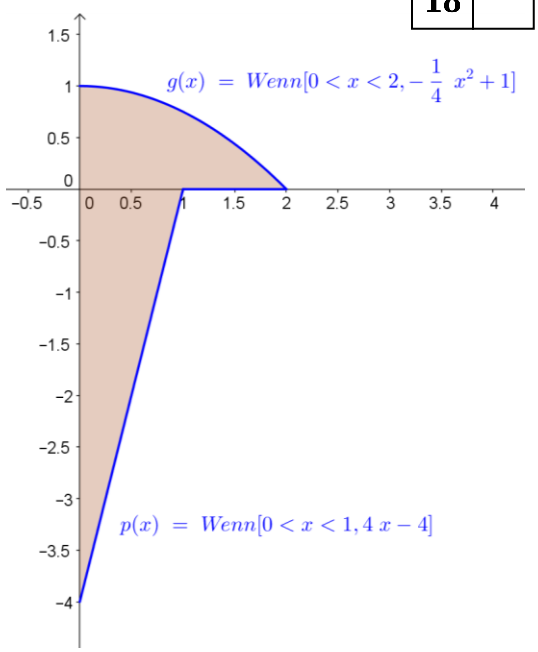
Rotiert der Graph von $f(x) = \frac{1}{x}$ über dem Intervall $I = [1; \infty[$ um die x-Achse, so entsteht ein trichterförmiges Gebilde, das auch die Torricelli-Trompete genannt wird.



a) Ermitteln Sie den Inhalt der Längsschnittfläche.
b) Berechnen Sie nun das Rotationsvolumen um die x-Achse.
c) Welche paradoxe Situation entstände, wenn man den Trichter mit Farbe füllen würde?

18

Aufgabe 6: Flächenberechnung und Rotationsvolumen



a) Berechnen Sie den Inhalt der gefärbten Fläche.

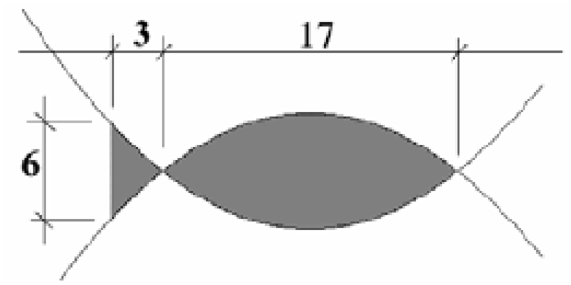
b) Wie groß ist das Volumen der gefärbten Fläche, wenn diese um die y-Achse rotiert? Welche Volumenform entsteht?

c) Erklären Sie den die Darstellungen und die mind. **drei** notwendigen Umformungsschritte:

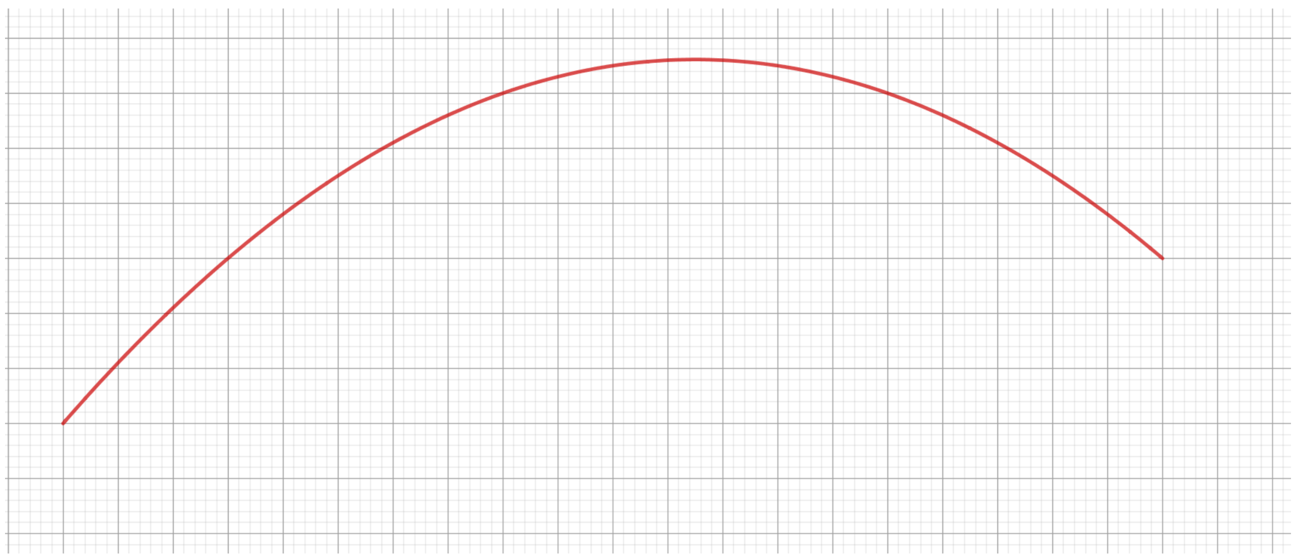
$$\int_{y_1}^{y_2} \left[f^{-1}(x) \right]^2 dy \quad = \quad \ldots \quad = \quad \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot f'(x)\, dx$$

Aufgabe 7: Der Fisch 10

Der dargestellte „Fisch“ wird durchzwei symmetrische Parabeln begrenzt. Die obere Randkurve kann folgende Form annehmen: $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + \frac{17}{20}x$



a) Zeichnen Sie die fehlenden Achsen in das gegebene KO-System ein, ermitteln Sie die Funktionsgleichung der unteren Randfunktion und zeichnen Sie diese ebenfalls in das KO-System.

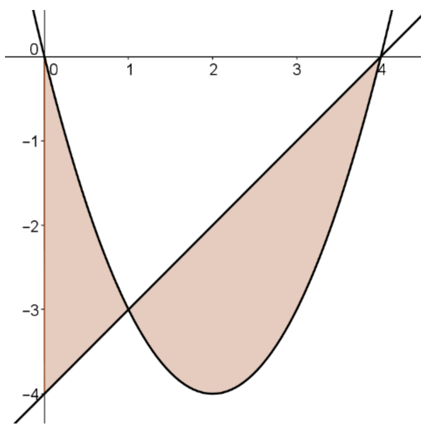


b) Berechnen Sie die schraffierte Fläche – also den Querschnitt des „Fischs“.

Aufgabe 8: Flächeninhalt zwischen Funktionen 14

a) Bestimmen Sie den Inhalt der von den Graphen der Funktionen f und g im Intervall I = [0 ; 4] eingeschlossenen Fläche:

$$f(x) = x^2 - 4x \quad und \quad g(x) = x - 4$$



b) Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ wird von einer Ursprungsgeraden mit positiver Steigung geschnitten. Wie groß ist die Steigung, damit die eingeschlossene Fläche 9 FE beträgt?

Option: Wählen Sie nun entweder die Aufgaben 9 und 10 oder die Aufgabe 11 zur Bearbeitung.

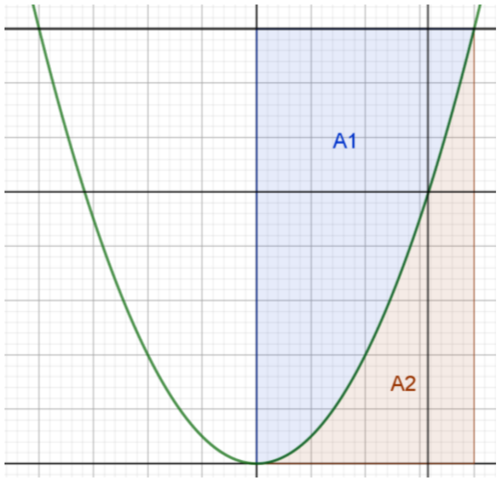
Aufgabe 9: Halbierung von Flächen

12	

Die abgebildete Parabel $f(x) = x^2 \quad mit\ x \geq 0$,

die Gerade y = 4 und die y-Achse schließen die Fläche A1 ein.

Die unter der Randfunktion mit der x-Achse im Intervall [0 ; 2] begrenzte Fläche soll A2 genannt werden.



a) In welchem Verhältnis teilt die Funktion f(x) die beiden Flächen zueinander auf?

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Parallelen zur x- und zur y-Achse, wobei die **Parallele zur y-Achse die Fläche A2** und die **Parallele zur x-Achse die Fläche A1** halbiert.

Aufgabe 10: Rotationsvolumen

14	

Die Funktion $f_k(x) = \dfrac{x^2 - k}{kx} \quad mit\ x \in [1;2] \quad und\ k > 0$ rotiere um die **x-Achse**.

a) Zeigen Sie, dass das Rotationsvolumen folgenden Ausdruck annehmen kann:

$$V(k) \quad = \quad \pi \cdot \left(\frac{7}{3k^2} - \frac{2}{k} + \frac{1}{2} \right)$$

b) Bestimmen Sie mittels $V(k)$ den Wert des Parameters k so, dass das Volumen des Rotationskörpers extrem wird.
Ermitteln Sie auch die Art des Extremums.

Aufgabe 11: Kurvenuntersuchung gebrochen-rationaler Funktionen

26	

Gegeben sei die Funktion $f_k(x) \quad = \quad \dfrac{x^2 - kx}{x - 2} \quad mit\ k > 0$

a) Bestimmen Sie die Polstellen, Lücken und Nullstellen der Funktion in Abhängigkeit des Parameters k.
Führen Sie eine Fallunterscheidung mit k < 2, k = 2 und k > 2 durch.

b) Zeigen Sie, dass die ersten beiden Ableitungen folgende Form annehmen können:

$$f_k'(x) \quad = \quad \frac{x^2 - 4x + 2k}{(x-2)^2} \quad und \quad f_k''(x) \quad = \quad \frac{8 - 4k}{(x-2)^3}$$

c) Warum besitzt die Funktion keine Wendepunkte?

d) Zeigen und begründen Sie, dass nur für k < 2 Extrema bei der Funktion existieren.

e) Bestimmen Sie das Extremum der Funktion und die Art für **k = 1**.

f) Berechnen Sie die Asymptote der Funktion für **k = 1**.

g) Skizzieren Sie die Funktion mit Polstellen und Asymptote für **k = 1**.