12. Jgst.	**Mathematik / Leistungsfach**	**KA3_LKM 12/2 Pi/Mei**
Klasse: BGY18	**3. Kursarbeit (Nachtermin)**	**Datum: 10.06.2020**
Name:	**Rohpunkte: 100**	**Notenpunkte:**

Notieren Sie sämtliche Ansätze und Nebenrechnungen auf Ihren Bearbeitungsblättern!
Nummerieren Sie alle Seiten! Geben Sie Ihre Blätter in einer sinnvollen Ordnung ab!

Aufgabe 1: Funktionenschar Exponentialfunktionen — *50 [4 – 6 – 8 – 6 – 4 – 3 – 7 – 4 - 8]*

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = (x-k)e^{\frac{1}{3}x} \quad mit\ x \in \Re \quad und\ k > 0$

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Funktionenschar $f_k(x)$ mit den Koordinatenachsen.

$$Y-Achse: \quad f_k(0) = (0-k)e^{\frac{1}{3}\cdot 0} = -k \quad \rightarrow \quad S_y(0 \mid -k)$$

$$Nullstelle: \quad f_k(x) = (x-k)e^{\frac{1}{3}x} \quad = \quad 0 \quad \xrightarrow{e^{\frac{1}{3}x} \neq 0} \quad x = k$$

b) Beurteilen Sie das Grenzwertverhalten der Funktion an den Rändern des Def.-Bereichs.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty} (x-k)e^{\frac{1}{3}x} \xrightarrow[(x-k)\to\infty]{e^{\frac{1}{3}x}\to\infty} \text{"}\infty\cdot\infty\text{"} \to \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-k)e^{\frac{1}{3}x} \underset{\text{"}-\infty\cdot 0\text{"}}{\overset{unbestimmter\ Ausdruck}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{-(x-k)}{e^{\frac{1}{3}x}} \xrightarrow{L'Hospital} \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}} \to 0^{(-)}$$

c) Zeigen Sie, dass die 1. und 2. Ableitung folgende Formen haben kann:

$$f_k'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}(x-k+3) \qquad f_k''(x) = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}x}(x-k+6)$$

$$f_k'(x) = 1\cdot e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}\cdot(x-k)e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}\cdot(x-k)e^{\frac{1}{3}x} = \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x-k+3)$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x-k+3) + \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot 1 = \frac{1}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x-k+3) + \frac{1}{3}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x-k+3) + \frac{1}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot 3 = \frac{1}{9}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x-k+6)$$

d) Bestimmen Sie Lage und Art der Extrempunkte der Scharkurven.

$$f_k'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}(x-k+3) = 0 \rightarrow x = k-3$$

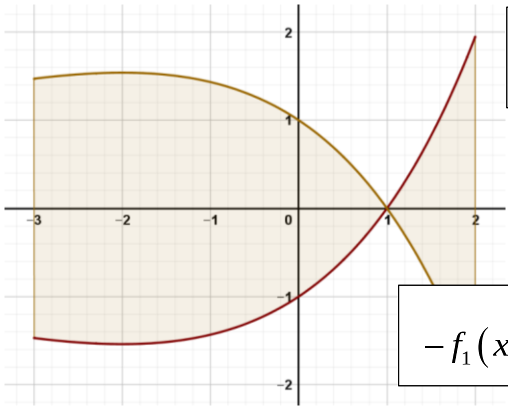
$$f_k''(k-3) = \frac{1}{9}e^{\frac{1}{3}(k-3)}(k-3-k+6) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}k-1} > 0 \rightarrow Min\left(k-3 \,\middle|\, (-3)e^{\frac{1}{3}(k-3)}\right)$$

e) Betrachtet werden soll die Funktion nun im Intervall D = [-3 ; 2].
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente in Abhängigkeit von k an der Stelle x = 0.

$$\left.\begin{array}{lclclcl} f_k(0) & = & (0-k)e^{\frac{1}{3}\cdot 0} & = & (-k) & = & y-Wert \\ f_k'(x) & = & \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}\cdot 0}(0-k+3) & = & \frac{1}{3}(3-k) & = & m \end{array}\right\} \begin{array}{lcl} (-k) & = & \frac{1}{3}(3-k)\cdot 0+b \\ b & = & (-k) \end{array}$$

$$Tangente: \quad t(x) = \frac{1}{3}(3-k)x-k$$

f) Für welchen Wert des Parameters k ist der Ausschnitt des Graphen der Funktion $f_k(x)$ hier dargestellt? Beschriften Sie den Verlauf mit $f_k(x)$ und bestimmen Sie auch die Funktionsvorschrift des gespiegelten Kurvenverlaufs.



$$\boxed{f_1(x)=(x-1)e^{\frac{1}{3}x}}$$

$$\boxed{-f_1(x)=-(x-1)e^{\frac{1}{3}x} \rightarrow g_1(x)=(1-x)e^{\frac{1}{3}x}}$$

$$Y-Achse: \quad f_k(0)=(0-k)e^{\frac{1}{3}\cdot 0}=-k \;\rightarrow\; S_y(0\,|\,-k) \xrightarrow{-k=-1} k=1$$

$$Nullstelle: \quad f_k(x)=(x-k)e^{\frac{1}{3}x} = 0 \xrightarrow{e^{\frac{1}{3}x}\neq 0} x=k \xrightarrow{x=1} k=1$$

Funktionsvorschrift des gespiegelten Verlaufs:

$$-f_k(x)=-(x-k)e^{\frac{1}{3}x} \xrightarrow{k=1} g_1(x)=-(x-1)e^{\frac{1}{3}x}=(1-x)e^{\frac{1}{3}x}$$

<u>Sei für die folgenden Fragestellungen sei k = 2:</u>

g) Zeigen Sie mittels **Integralrechnung**, dass eine Stammfunktion von $f_2(x)$ wie folgt lautet:

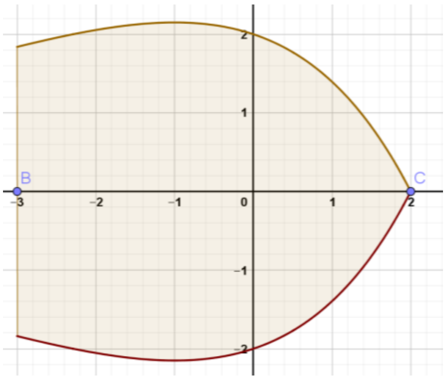
$$F_2(x) = 3(x-5)e^{\frac{1}{3}x}$$

$$\int f_2(x)dx = \int (x-2)e^{\frac{1}{3}x}dx = (x-2)\cdot 3e^{\frac{1}{3}x} - \int 1\cdot 3e^{\frac{1}{3}x}dx$$

$$\begin{array}{l|l} u=x-2 & v=3e^{\frac{1}{3}x} \\ \hline u'=1 & v'=e^{\frac{1}{3}x} \end{array}$$

$$\int f_2(x)dx = (x-2)\cdot 3e^{\frac{1}{3}x} - 9e^{\frac{1}{3}x} = (x-2)\cdot 3e^{\frac{1}{3}x} - 3\cdot 3e^{\frac{1}{3}x} = 3e^{\frac{1}{3}x}(x-5)$$

h) Bestimmen Sie die Fläche zwischen der Funktion $f_2(x)$ und dem gespiegelten Verlauf im wie in der Abbildung angezeigten Definitionsbereich.



$$\left[F_2(x)\right]_{-3}^{2} = \left[3(x-5)e^{\frac{1}{3}x}\right]_{-3}^{2} = 3\cdot\left[(-3)e^{\frac{2}{3}}-(-8)e^{-1}\right] = 3\cdot\left[(-3)e^{\frac{2}{3}}+\frac{8}{e}\right] = -8,7$$

$$\xrightarrow{\text{Symmetrie zur } x-\text{Achse}} A_{ges} = 2\cdot 8,7 = 17,4$$

i) In den Graphen der Funktion $f_2(x)$ soll ein Dreieck derart einbeschrieben werden, dass zwei Eckpunkte auf der Grundlinie (=x-Achse) durch die Punkte B und C festgelegt sind und sich die Spitze des Dreiecks auf der Funktion befindet.

Ermitteln Sie den gesuchten Punkt A so, dass das Dreieck maximalen Flächeninhalt besitzt. Zeigen Sie auch, dass es sich um ein Maximum handelt und berechnen Sie die Fläche.

Fläche:

$$A_\Delta(g,h) = \frac{1}{2}g\cdot h \rightarrow A_\Delta(x) = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot f_2(x) = \frac{5}{2}\cdot(x-2)e^{\frac{1}{3}x}$$

$$A_\Delta'(x) = \frac{5}{2}\cdot 1\cdot e^{\frac{1}{3}x}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot(x-2)e^{\frac{1}{3}x} = \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\left[1+\frac{1}{3}\cdot(x-2)\right]$$

$$A_\Delta'(x) = \frac{5}{2}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x+1) = 0 \rightarrow x=(-1)$$

$$A_\Delta''(x) = \frac{5}{18}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot(x+1)+\frac{5}{6}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot 1 \xrightarrow{x=(-1)} \frac{5}{18}\cdot e^{\frac{1}{3}x}\cdot 0+\frac{5}{6}\cdot e^{-\frac{1}{3}} > 0 \rightarrow Min$$

Alternativ:

$$A_\Delta(g,h) = \frac{1}{2}g\cdot h \rightarrow A_\Delta(x) = \frac{5}{2}\cdot f_2(x) \rightarrow A_\Delta'(x) = \frac{5}{2}\cdot f_2'(x) = 0 \xrightarrow{\text{Teilaufgabe c)+d)}} x=(-1)$$

$$\rightarrow A_\Delta''(x) = \frac{5}{2}\cdot f_2''(x) \rightarrow A_\Delta''(-1) = \frac{5}{2}\cdot f_2''(-1) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{9}e^{-\frac{1}{3}}\cdot 3 = \frac{5}{6}e^{-\frac{1}{3}} > 0 \rightarrow Min$$

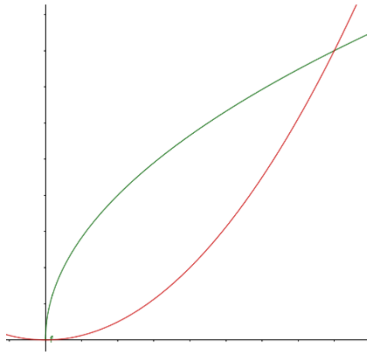
Fläche:

$$A_\Delta(-1) = \left|\frac{1}{2}\cdot 5\cdot f_2(-1)\right| = \left|-\frac{15}{2}\cdot e^{-\frac{1}{3}}\right| \approx 5,374$$

Erklärung zum Extremum:
Da man die Fläche unterhalb der x-Achse betrachtet, stellt die Höhe vom Extremwertverlauf der Funktion ein Minimum dar; allerdings ist die Fläche damit maximal.
Alternativ könnte man die Situation an der x-Achse gespiegelt untersuchen => dann würde ein Maximum entstehen, da die gespiegelte Funktionsvorschrift -f(x) lauten würde.

Aufgabe 2: Integralrechnung | **30 [8 – 6 – 16 (5 – 5 – 4 – 2)]**

Teil 1: Fläche zwischen Funktionen



Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird.

Schnittstellen:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{4} \cdot x^2 \xrightarrow{quadrieren} 4x = \frac{1}{16} \cdot x^4$$

$$\rightarrow \frac{1}{16} \cdot x^4 - 4x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{16} \cdot x^3 - 4\right) = 0 \rightarrow x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 4$$

Fläche zwischen den Funktionen:

$$f(x) = g(x) \rightarrow 2 \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{4} \cdot x^2 \xrightarrow{quadrieren} 4x = \frac{1}{16} \cdot x^4$$

$$\rightarrow \int_0^4 \left(2 \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{4} \cdot x^2\right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{1}{12} \cdot x^3\right]_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{64}{12} = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

Teil 2: Integralgleichungen

Bestimmen Sie ***<u>alle (möglichen)</u>*** Integrationsgrenzen, so dass die Integralgleichung erfüllt ist.

$$\int_{-a}^{a} \left(x^2 - 6\right) dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} \left(x^2 - 6\right) dx = 0 \rightarrow \left[\frac{1}{3}x^3 - 6x\right]_{-a}^{a} = 0 \rightarrow \frac{1}{3}a^3 - 6a - \left[\frac{1}{3}(-a)^3 - 6 \cdot (-a)\right] = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}a^3 - 6a + \frac{1}{3}a^3 - 6a = 0 \rightarrow \frac{2}{3}a^3 - 12a = 0 \rightarrow \left(\frac{2}{3}a^2 - 12\right)a = 0$$

$$\rightarrow a_1 = 0 \quad und \quad a_{2/3} = \pm\sqrt{18}$$

$$Alternative: \quad Achsensymmetrie$$

$$\int_{-a}^{a} \left(x^2 - 6\right) dx = 0 \rightarrow 2\int_{0}^{a} \left(x^2 - 6\right) dx = 0 \rightarrow 2\left[\frac{1}{3}x^3 - 6x\right]_0^a = 0 \rightarrow \frac{2}{3}a^3 - 12a = 0$$

Teil 3: Integrationsverfahren

Bestimmen Sie die Menge der Stammfunktionen F(x) zu folgenden Funktionen f(x):

a) $f(x) = \ln(x)$ b) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ c) $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$

d) Begründen Sie, warum diese Darstellung $\int g(x) \cdot g'(x) dx = \frac{1}{2}\left[g(x)\right]^2 + c$ für die Lösung von Teilaufgabe c) hilfreich ist.

Partielle Integration

$$\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$u=x$	$v=\ln(x)$
$u'=1$	$v'=\frac{1}{x}$

$$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x)-\int 1dx = x\cdot\ln(x)-x+c = x\cdot\left[\ln(x)-1\right]+c$$

Integration durch Substitution

$$u(x) = x^2 \quad und \quad \frac{du}{dx}(x) = 2x \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{du}{x} = dx$$

$$\int x\cdot e^{x^2}dx = \int x\cdot e^{u}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{du}{x} = \frac{1}{2}\cdot\int e^{u}du = \frac{1}{2}\cdot e^{u} = \frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+c$$

$$f(x) = \cos(x)\cdot\sin(x)$$

Partielle Integration

$$\int \cos(x)\cdot\sin(x)\,dx = \sin(x)\cdot\sin(x)-\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx \xrightarrow{+\int \sin(x)\cdot\cos(x)dx}$$

$u=\sin(x)$	$v=\sin(x)$
$u'=\cos(x)$	$v'=\cos(x)$

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \sin^2(x) \xrightarrow{:2} \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)+c$$

Alternative: Integration durch Substitution

$$u(x) = \sin(x) \quad und \quad \frac{du}{dx}(x) = \cos(x) \rightarrow \frac{du}{\cos(x)} = dx$$

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \int u\cdot\cos(x)\frac{du}{\cos(x)} = \int u\,du = \frac{1}{2}\cdot u^2 = \frac{1}{2}\cdot\sin^2(x)+c$$

Partielle Integration

$$\int g(x)\cdot g'(x)\,dx = g(x)\cdot g(x)-\int g'(x)\cdot g(x)\,dx \xrightarrow{+\int g'(x)\cdot g(x)dx}$$

$u=g(x)$	$v=g(x)$
$u'=g'(x)$	$v'=g'(x)$

$$2\int g(x)\cdot g'(x)\,dx = g^2(x) \xrightarrow{:2} \int g(x)\cdot g'(x)\,dx = \frac{1}{2}g^2(x)+c$$

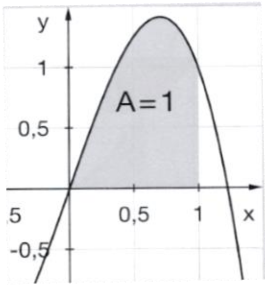
Anwendung möglich, da die Ableitung von sin(x) der cos(x) ist.

Hinweis: **Bearbeiten Sie von den folgenden beiden Aufgaben nur eine – also 3 oder 4!!!**

Aufgabe 3: Rekonstruktion ganzrationaler Funktionen ***20 [10 – 10]***

a)

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades verläuft durch den Punkt P(-1/-1) und besitzt im Ursprung einen Wendepunkt.
Außerdem ist folgende (Teil)Fläche des Graphen mit der Abszisse bekannt.



Bestimmen Sie den Funktionsterm.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b \qquad F(x) = \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{3}bx^3 + \frac{1}{2}cx^2 + dx$$

$$\left.\begin{aligned} &I.) \quad f(0) = d = 0 \\ &II.) \quad f''(0) = 2b = 0 \rightarrow b = 0 \\ &III.) \quad f(-1) = -a - c = -1 \\ &IV.) \quad \left[\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}cx^2\right]_0^1 = 1 \rightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}c = 1 \end{aligned}\right\} \quad a = -2 \quad b = 0 \quad c = 3 \quad d = 0$$

$$\rightarrow \quad f(x) = -2x^3 + 3x$$

b)

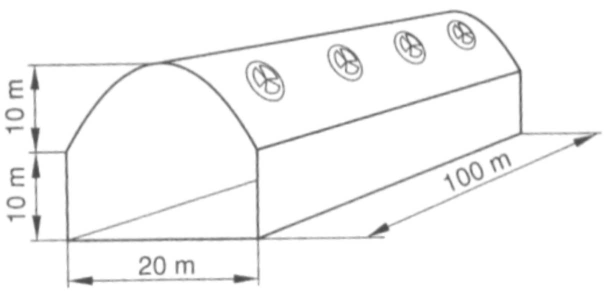
In einem 100m langen Tunnel mit parabelförmiger Wölbung sollen Ventilatoren angebracht werden, welche die Belüftung des Tunnels gewährleisten.
Ein Ventilator ist in der Lage pro Stunde 1000 Kubikmeter auszutauschen.

(i) Bestimmen Sie den Funktionsterm des Parabelbogens auf der Basis der vorgegebenen Daten.

(ii) Wie viele Ventilatoren sind nötig, damit jede Stunde ein kompletter Luftaustausch stattfindet.

Hinweis: Mögliches Ergebnis für den Funktionsterm des Parabelbogens:

$$f(x) = 10 \cdot \left(-\frac{1}{100}x^2 + 1\right)$$



$$\left.\begin{aligned} &f(x) = ax^2 + bx + c \\ &I.) \quad f(x) = f(-x) \rightarrow b = 0 \\ &II.) \quad f(0) = c = 10 \\ &III.) \quad f(10) = 100a + c = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{10} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 10 = 10 \cdot \left(-\frac{1}{100}x^2 + 1\right)$$

$$A_{Quer}(x) = 2\int_0^{10}\left(-\frac{1}{10}x^2+10\right)dx+20\cdot 10 = 2\cdot\left[-\frac{1}{30}x^3+10x\right]_0^{10}+200 = \frac{1.000}{3}\left[m^2\right]$$

$$V = \frac{1.000}{3}\left[m^2\right]\cdot 100[m] = \frac{100.000}{3}\left[m^3\right]$$

$$Z = \frac{\frac{100.000}{3}\left[m^3\right]}{1.000\left[\frac{m^3}{h}\right]} = \frac{100}{3}[h] \rightarrow 34\,[Ventilatoren]$$

Aufgabe 4: Matrizenrechnung	**20 [4 – 4 – 4 – 4 - 4]**

Gegeben sind folgende Matrizen:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ t\\ -1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ t & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}2 & t\\ -t & 4\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie nun folgende Ausdrücke:

a) A + 2 C   b) 3A * B   c) A * C^T d) D^2

e) Warum gelten die Binomischen Formeln i.A. bei der Matrizenrechnung nicht?

Begründen Sie mit Beispielen und Erklärung.

$$A+2C = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ t & 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 10 & 2\\ -2+2t & 5 & t+2\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} 3A\cdot B & \begin{pmatrix}1\\ t\\ -1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}3 & 6 & 12\\ -6 & 3 & 3t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}6t-9\\ -6\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} A\cdot C^T & \begin{pmatrix}1 & t\\ 4 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -2 & 1 & t\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5 & t+8\\ 2-t & 2-t\end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} D^2 = D\cdot D & \begin{pmatrix}2 & t\\ -t & 4\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}2 & t\\ -t & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4-t^2 & 6t\\ -6t & 16-t^2\end{pmatrix}\end{array}$$

Die Binomischen Formeln gelten i.A. nicht, da das Kommutativgesetz bei der Matrizenmultiplikation normalerweise nicht gilt.
Beispiel:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad aber \quad (A+B)^2 = (A+B)\cdot(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$$

Anlage Graphen zu Aufgabe 1: