12. Jgst.	**Mathematik / Leistungsfach**	**KA2_LKM 12/1 Pi/Mei**
Klasse: BGY18	**2. Kursarbeit**	**Datum: 17.12.2019**
Name:	**Rohpunkte: 98**	**Notenpunkte:**

Notieren Sie sämtliche Ansätze und Nebenrechnungen auf Ihren Bearbeitungsblättern!
Nummerieren Sie alle Seiten! Geben Sie Ihre Blätter in einer sinnvollen Ordnung ab!

Aufgabe 1: Ableitungen *12 [4 – 4 – 4]*

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=\dfrac{x-x^3}{2-x^2}$ b) $h_k(x)=e^{\frac{kx^5-4x^2}{x^3}}$ c) $g_k(x)=\sin(kx)\cdot e^{x^2-4x+1}$

Lösung:

$$f'(x)=\frac{(1-3x^2)\cdot(2-x^2)-(x-x^3)\cdot(-2x)}{(2-x^2)^2}=\frac{(1-3x^2)\cdot(2-x^2)+2x\cdot(x-x^3)}{(2-x^2)^2}$$

$$h_k(x)=e^{kx^2-\frac{4}{x}} \quad\rightarrow\quad h_k'(x)=e^{kx^2-\frac{4}{x}}\cdot\left(2kx+\frac{4}{x^2}\right)$$

$$g_k'(x)=k\cdot\cos(kx)\cdot e^{x^2-4x+1}+\sin(kx)\cdot e^{x^2-4x+1}\cdot(2x-4)$$
$$g_k'(x)=e^{x^2-4x+1}\cdot\left[k\cdot\cos(kx)+\sin(kx)\cdot(2x-4)\right]$$

Aufgabe 2: Exponentialgleichungen *20 [4 – 4 – 6 - 6]*

Teil 1: Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a) $2x\cdot e^x-3e^x=0$ c) $5e^x+25e^{-x}=126$

b) $(x^3+8)(e^x+2)=0$

Lösung:

$$2x\cdot e^x-3e^x=0 \xrightarrow{\text{ausklammern}} e^x(2x-3)=0 \xrightarrow[e^x\neq 0]{\text{Nullprodukt}} x=1{,}5$$

$$(x^3+8)(e^x+2)=0 \xrightarrow[e^x\neq -2]{\text{Nullprodukt}} x=-2$$

$$5e^x+25e^{-x}=126 \xrightarrow[\cdot e^x]{-126} 5e^{2x}-126e^x+25=0 \xrightarrow[u=e^x]{\text{Substitution}} 5u^2-126u+25=0$$

$$\rightarrow\quad u_1=25 \quad und \quad u_2=\frac{1}{5} \xrightarrow[u=e^x]{\text{Re-Substitution}} x_1=\ln 25 \quad und \quad x_2=\ln\frac{1}{5}$$

Teil 2: Für welche Werte von a hat die Gleichung $a \cdot e^{2x} - e^{x} = 0$ keine bzw. genau eine Lösung?

Lösung:

$$a \cdot e^{2x} - e^{x} = 0 \xrightarrow{ausklammern} e^{x}\left(a \cdot e^{x} - 1\right) = 0 \xrightarrow[e^{x} \neq 0]{Nullprodukt} x = \ln\frac{1}{a}$$

$$\rightarrow \quad keine\ Lösung \Leftrightarrow a \leq 0\,; \quad sonst\ eine\ Lösung$$

Aufgabe 3: Gebr.-rat. Funktionen	**28 [8 – 8 – 6 – 6]**

Gegeben sei die Funktion f mit $f\left(x\right) = \dfrac{80}{x^{2} - 16} + 25$

a) Bestimmen Sie die Schnittstellen mit den Koordinatenachsen, die Polstellen und die Asymptote.

Lösung:

$$f\left(x\right) = \frac{80}{x^{2} - 16} + 25 = \frac{25x^{2} - 320}{x^{2} - 16}$$

$$Nullstellen: \quad |x| = \frac{320}{25} = 3{,}5777 \qquad S_{y}\left(0 \mid 20\right)$$

$$Polstellen: \quad |x| = 4\ mVZW \qquad Asymptote: a\left(x\right) = 25$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktion genau einen lokalen Extrempunkt besitzt und bestimmen Sie Art und Lage.

Lösung:

$$f'\left(x\right) = \frac{-160x}{\left(x^{2} - 16\right)^{2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

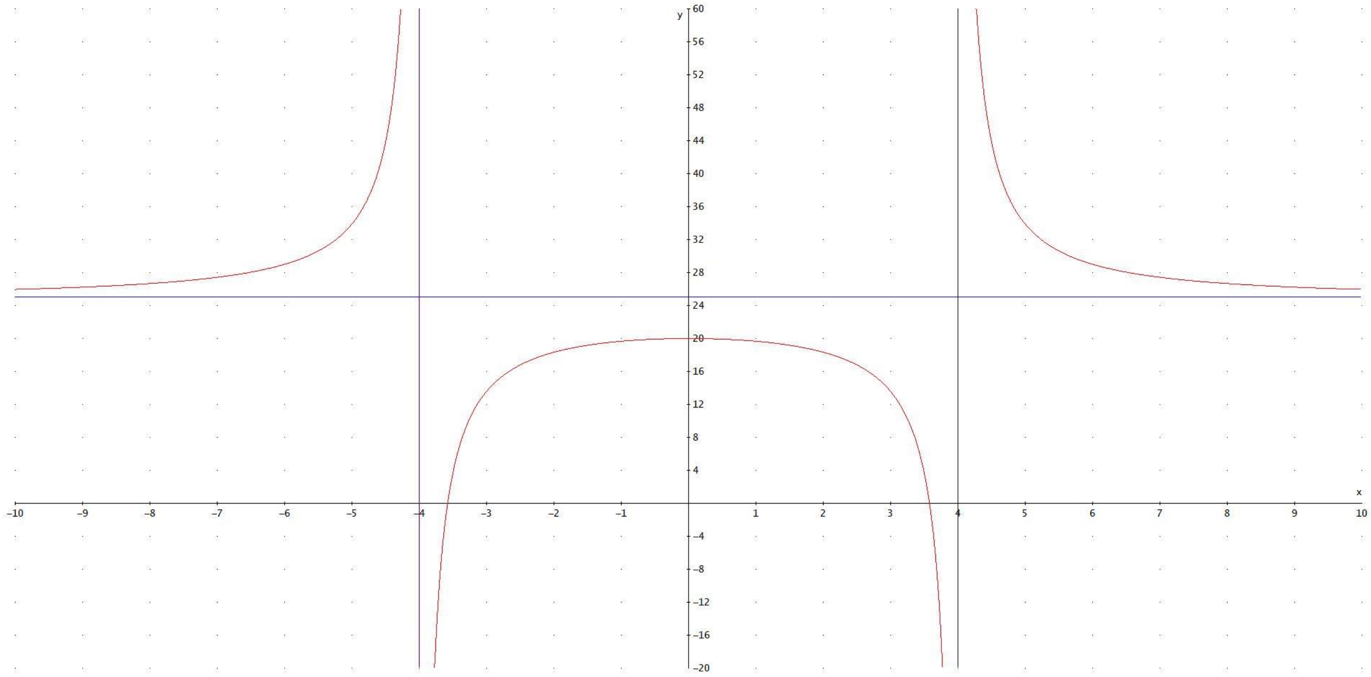
$$f''\left(x\right) = \frac{-160 \cdot \left(x^{2} - 16\right)^{2} - \left[-160x \cdot 2\left(x^{2} - 16\right) \cdot 2x\right]}{\left(x^{2} - 16\right)^{4}}$$

$$f''\left(x\right) = \frac{\left(x^{2} - 16\right)\left[-160 \cdot \left(x^{2} - 16\right) + 640x^{2}\right]}{\left(x^{2} - 16\right)^{4}} = \frac{480x^{2} + 2.560}{\left(x^{2} - 16\right)^{3}} = \frac{160\left(3x^{2} + 16\right)}{\left(x^{2} - 16\right)^{3}}$$

$$f''\left(0\right) = \frac{160\left(3 \cdot 0 + 16\right)}{\left(0 - 16\right)^{3}} = -\frac{1}{16} < 0 \rightarrow Max\left(0 \mid 20\right)$$

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(x), die Polstellen und die Asymptote in ein Koordinatensystem.

Lösung:



d) Ab welchen ganzzahligen Stellen ist der Abstand **e** zwischen Funktion und der Horizontalen mit y = 25 kleiner als e = 0,001?

Lösung:

$$f(x)=\frac{80}{x^2-16}+25 \quad und \quad y=25$$

$$d(x)=f(x)-y \quad \rightarrow \quad d(x)=\frac{80}{x^2-16}+25-25=\frac{80}{x^2-16}$$

$$\frac{80}{x^2-16}<0,001 \xrightarrow{\cdot(x^2-16)} 80<0,001x^2-0,016 \xrightarrow{+0,016} 80,016<0,001x^2$$

$$\xrightarrow{\cdot 1.000} x^2>80.016 \rightarrow |x|>282,87 \rightarrow |x|>283$$

Aufgabe 4: e-Funktionen	**38 [6 – 6 – 8 – 6 – 8 – 4]**

In einer großen Stadt breitet sich eine Viruserkrankung aus.
Die momentane Erkrankungsrate wird modellhaft beschrieben durch die Funktion f_k mit

$$f_k(t)=100t^2\cdot e^{-k\cdot t} \quad mit\ t\geq 0 \quad und\ k>0$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen seit Beobachtungsbeginn und f(t) die Anzahl der **Neuerkrankungen pro Woche**.

a) Zeigen Sie, dass die 1. Ableitung der Funktion folgende Form annehmen kann:

$$f_k\,'(t) = f_k(t) \cdot \left(\frac{2}{t} - k\right)$$

Lösung:

$$f_k\,'(t) = 200t \cdot e^{-k \cdot t} - k \cdot 100t^2 \cdot e^{-k \cdot t} = 100t^2 \cdot e^{-k \cdot t}\left(\frac{2}{t} - k\right) = f_k(t) \cdot \left(\frac{2}{t} - k\right)$$

b) Bestimmen Sie die Ortskurve der Extrema.

Lösung:

$$f_k\,'(t) = 100t^2 \cdot e^{-k \cdot t}\left(\frac{2}{t} - k\right) = 0 \xrightarrow[e^{-k \cdot t} \neq 0]{\text{Nullprodukt}} k = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{in } f_k(t)}$$

$$\text{Ortskurve:} \quad y = 100t^2 \cdot e^{-\frac{2}{t} \cdot t} = \frac{100t^2}{e^2}$$

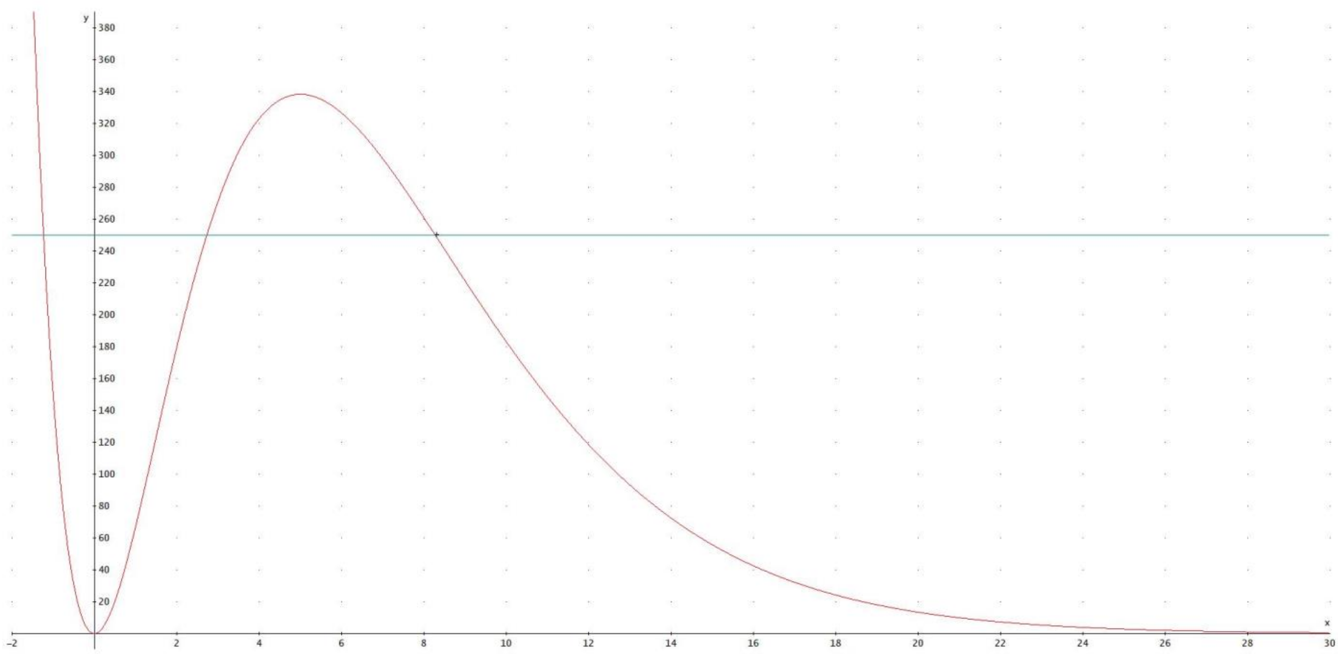
Für die folgenden Frage- und Aufgabenstellungen sei k = 0,4:

$$f_{0,4}(t) = 100t^2 \cdot e^{-0,4 \cdot t}$$

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche für $t \in \{0\,;5\,;10\,;20\}$ und skizzieren Sie den Verlauf der Funktion.

$$f_{0,4}(0) = 100 \cdot 0^2 \cdot e^{-0,4 \cdot 0} = 0 \qquad f_{0,4}(5) = 100 \cdot 5^2 \cdot e^{-0,4 \cdot 5} = 338,34$$

$$f_{0,4}(10) = 100 \cdot 10^2 \cdot e^{-0,4 \cdot 10} = 183,16 \qquad f_{0,4}(20) = 100 \cdot 20^2 \cdot e^{-0,4 \cdot 20} = 13,42$$



d) Begründen Sie, warum die Funktion nur eine Nullstelle besitzt.
Was bedeutet dies für den dargestellten Sachverhalt?
Bestimmen Sie in diesem Zusammenhang das Grenzwertverhalten für $t \to \infty$

Lösung:

$$f_{0,4}(t) = 100t^2 \cdot e^{-0,4 \cdot t} = 0 \quad \xrightarrow{e^{-0,4 \cdot t} \neq 0} \quad t = 0 \left[doppelte\ NS \to Extremum \right]$$

Das bedeutet, dass immer weiter Menschen an dem Virus erkranken; wobei die Anzahl natürlich schwankt.

$$\lim_{t \to \infty} f_{0,4}(t) \quad = \quad \lim_{t \to \infty} 100t^2 \cdot e^{-0,4 \cdot t} \quad = \quad \lim_{t \to \infty} \frac{100t^2}{e^{0,4 \cdot t}}$$

$$\xrightarrow{L'Hospital} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{200t}{0,4 \cdot e^{0,4 \cdot t}} \quad \xrightarrow{L'Hospital} \quad \lim_{t \to \infty} \frac{200}{0,16 \cdot e^{0,4 \cdot t}} \quad \xrightarrow{Grenzwertübergang} \quad 0$$

e) In welcher Woche erkranken die meisten Personen neu? Wie viele sind dies?
Bestätigen Sie Ihre Ausführungen mit Hilfe geeigneter Ableitungen.

Lösung:

$$f_{0,4}'(t) = 100t \cdot e^{-0,4 \cdot t}(2 - 0,4t) = 0 \quad \xrightarrow{e^{-0,4 \cdot t} \neq 0} \quad 2 - 0,4t = 0 \quad und \quad 100t = 0$$

$$\to \quad t = 5 \quad und \quad t = 0$$

Zur Bildung der 2.Ableitung, f'(t) so umformen,
dass das Produkt nur aus zwei Faktoren besteht.

$$\to \quad f_{0,4}'(t) = e^{-0,4 \cdot t}\left(200t - 40t^2\right)$$

$$\to \quad f_{0,4}''(t) = -0,4 \cdot e^{-0,4 \cdot t}\left(200t - 40t^2\right) + e^{-0,4 \cdot t}(200 - 80t) = e^{-0,4 \cdot t}\left(16t^2 - 160t + 200\right)$$

$$\to \quad f_{0,4}''(0) = e^0 \cdot 200 = 200 > 0 \quad \to \quad Min(0 \mid 0) \quad \to \quad Max(5 \mid 338,34)$$

f) In Erläutern Sie mit mathematischen Mitteln, dass die Erkrankungsrate nach der
5. Woche rückläufig ist. (=> Monotonie?!)

Lösung:

Bei t = 5 liegt das einzige lokale Maximum der Funktion;
für t > 5 existiert keine Stelle bei der die Steigung m = 0 gilt;
der Grenzwert f(t) für t $\to$ ∞ geht gegen 0;
daher kann der Verlauf der Funktion wie folgt beurteilt werden:
f(t) für t > 5 => streng monoton fallend

Zusatzaufgabe	10 [4 – 6]

Gegeben seien die Funktionen $f_b(x) = b \cdot e^x$ und $g_a(x) = e^{a-x}$

a) Bestimmen Sie jeweils den Wert der 1. Ableitung der beiden Funktionen an der Stelle **x = 1**.

b) Die Graphen von sollen sich an der Stelle **x = 1** orthogonal schneiden. Für welche Werte von a und b trifft dies zu?

Lösung:

$$f_b'(x) = b \cdot e^x \quad \rightarrow \quad f_b'(1) = b \cdot e^1 = b \cdot e$$

$$g_a'(x) = e^{a-x} \cdot (-1) \quad \rightarrow \quad g_a'(1) = -e^{a-1}$$

$$f_b(1) = b \cdot e \qquad\qquad g_a(1) = e^{a-1}$$

=> $f_b(1) = g_a(1) \rightarrow b \cdot e = e^{a-1}$ und

$$f_b'(1) \cdot g_a'(1) = (-1) \quad \rightarrow \quad b \cdot e \cdot \left(-e^{a-1}\right) = (-1) \quad \rightarrow \quad b \cdot e^a = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{e^a}$$

$$\rightarrow \quad b \cdot e = e^{a-1} \quad \xrightarrow{b = \frac{1}{e^a}} \quad \frac{1}{e^a} \cdot e = e^{a-1} \quad \rightarrow \quad e^{1-a} = e^{a-1}$$

$$\xrightarrow{Exp.\!-\!Vergleich} \quad 1 - a = a - 1 \quad \rightarrow \quad 2a = 2 \quad \rightarrow \quad a = 1 \quad \rightarrow \quad b = \frac{1}{e}$$

Quellen:

http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/a/elf2/elf2index.html

http://www.ohg.monheim.de/q1/383-e-funktion.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/kurs/exp_wachstum.htm

https://www.mathe-aufgaben.com/aufgaben/aufgaben-oberstufe.html

https://123mathe.de/aufgaben-kurvendiskussiont-e-funktion