12. Jgst. Klasse: BGY18 Name:	1. Klausur Fach: Mathematik / Leistungsfach Rohpunkte: 100	KA1_LKM 12/1 Pi/Mei Datum: 18.09.2019 Notenpunkte:

Notieren Sie sämtliche Ansätze und Nebenrechnungen auf Ihren Bearbeitungsblättern!

Nummerieren Sie alle Seiten! Geben Sie Ihre Blätter in einer sinnvollen Ordnung ab!

Aufgabe 1 — *16 [4 – 4 – 4 – 4]*

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \left(1 - x^3\right)^2$

b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \left(2x^2 + 5x - 9\right)$

c) $h_k(x) = \dfrac{kx^5 - 4x^2}{x^3}$

d) $p_k(x) = \dfrac{\sqrt{x^{2n}}}{2k^2} \cdot \left(x^2 - 4kx\right)$

Aufgabe 2 — *18 [3 – 12 – 3]*

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^2 \cdot \left(2a - x^2\right) \quad mit\ a > 0$

a) Ermitteln Sie die 1. und 2. Ableitung und zeigen Sie, dass gilt: $f_a'''(x) = -24x$

b) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema und untersuchen Sie, ob die Funktionen Wendestellen haben können.

Zwischenergebnis für die Extremstellen: $x_1 = 0 \quad und \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{a}$

c) Bestimmen Sie die Ortskurve der Hochpunkte im 1. Quadranten!

Aufgabe 3	**24 [3 – 5 – 4 – 6 – 4 – 2]**

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_s(x) = s \cdot x^3 - (s+1)x \quad mit\ x \in \Re\ und\ s > 0$$

a) Zeigen Sie, dass $f_s'(x) = 3sx^2 - s - 1$ gilt und bestimmen Sie die 2. Ableitung.

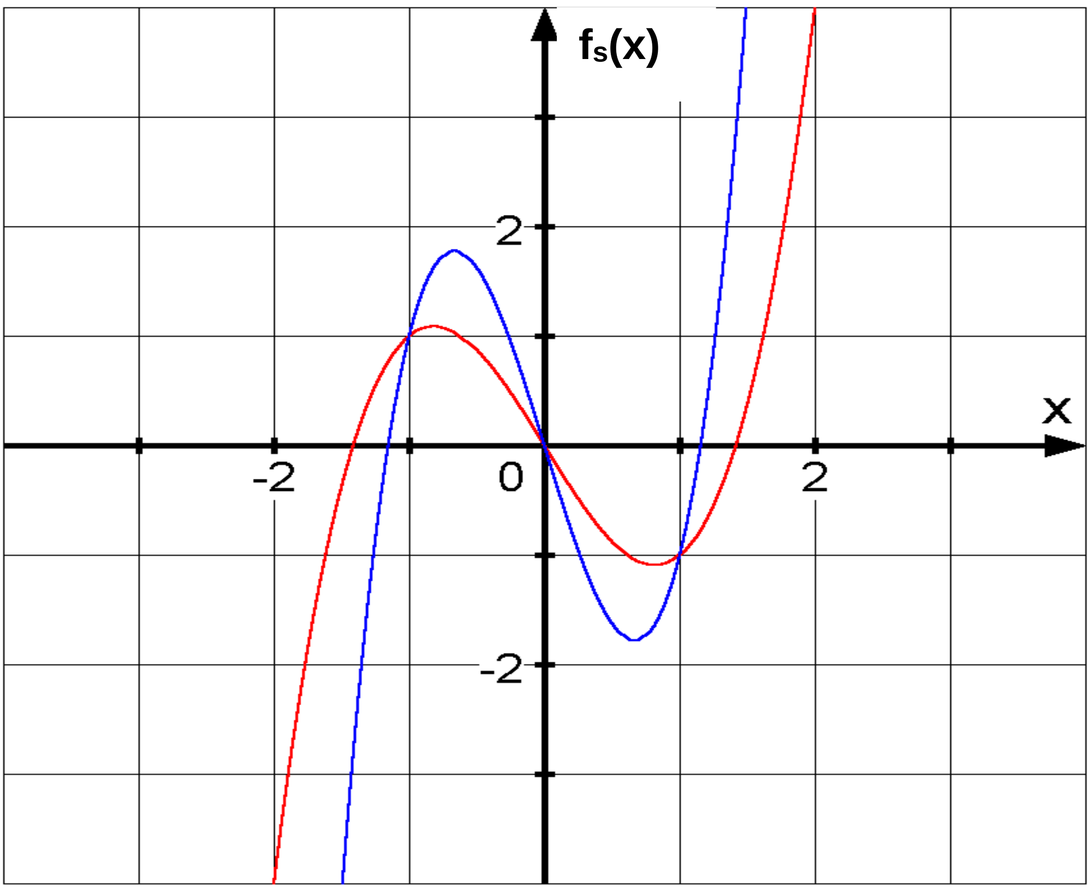
b) Bestimmen Sie die Tiefpunktstelle in Abhängigkeit der Scharvariablen s.

c) Ermitteln Sie für **s = 2** den Funktionswerts des **Hoch**punkts.
Begründen Sie hier kurz, warum Ihnen das Ergebnis aus Teil b) helfen könnte.

d) Ermitteln Sie Tangente und Normale an der Stelle x = 1 in Abhängigkeit von s.

e) In der Abb. unten sind die Graphen zu s = 1 und s = 3 gezeichnet. Kennzeichnen Sie in der Abb. welcher Graph zu welchem Parameterwert gehört!
Begründen Sie Ihre Entscheidung!

f) Es sei nun auch s < 0 möglich.
Beschreiben Sie den Graphen für s = -5 anhand einer charakteristischen Eigenschaft.



Aufgabe 4 　　　　　　　　　　　　*42 [2 – 4 – 8 – 4 – 4 – 5 – 6 - 9]*

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_k(x) = \frac{1}{9}x^4 - \left(\frac{k}{9}+1\right)x^2 + k \quad mit\ k \in \Re$$

a) Untersuchen Sie die Funktionen auf Symmetrie!

b) Zeigen Sie, dass man $f_k(x)$ auch in der Form

$$f_k(x) = \frac{1}{9}\left(x^2 - k\right)\left(x^2 - 9\right)$$

schreiben kann. Welchen Vorteil hat diese Darstellungsart?

c) Ermitteln Sie die Nullstellen und ihre Vielfachheit in Abhängigkeit von k und geben Sie diese an.

d) Zu welchen Parameterwerten gehören die nebenstehenden abgebildeten Funktionen?
Begründung erforderlich!

e) Begründen bzw. Erläutern Sie, dass gilt:

$$f_k{}'(x) = \frac{4}{9}x^3 - 2\left(\frac{k}{9}+1\right)x \quad \text{und} \qquad f_k{}''(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2k}{9} - 2$$

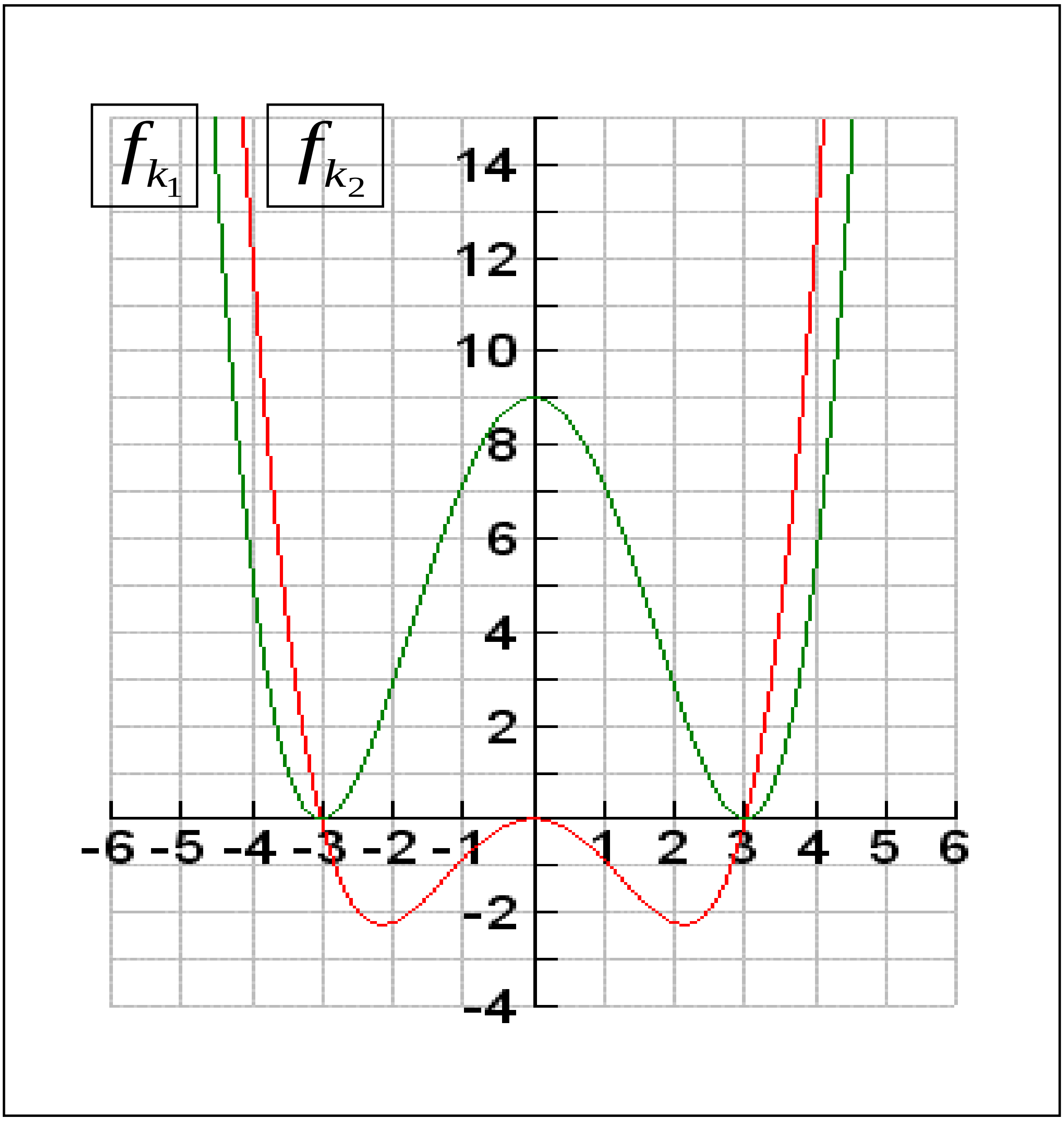
f) Zeigen Sie, dass die von k abhängigen, möglichen Extremstellen folgende

Form haben können: $x_{1/2} = \frac{\sqrt{2k+18}}{2}$

=> Kommentieren Sie bitte Ihre Zwischenschritte(!)
=> Gibt es noch weitere Extrema?

g) Argumentieren Sie auf analytisch-mathematischer Basis, dass für **k = - 9** ein Extremum vorliegt und bestimmen Sie die Art des Extremums.

h) Führen Sie mittels Fallunterscheidung eine Analyse bezüglich der Anzahl unterschiedlicher Extrema in Abhängigkeit von k durch.



f_{k_1}
f_{k_2}
14
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6

Musterlösung

① a) $f(x) = (1-x^3)(1-x^3) = (1-x^3)^2$

→ Produktregel: $f'(x) = -3x^2(1-x^3) + (1-x^3)(-3x^2)$

$= 2\left[-3x^2 \cdot (1-x^3)\right]$

$= -6x^2(1-x^3)$

→ Kettenregel: $f'(x) = 2(1-x^3)^1 \cdot (-3x^2) = -6x^2(1-x^3)$

b) $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x^2+5x-9) + \sqrt{x}(4x+5)$ (Produktregel)

$= x^{1,5} + 2{,}5\sqrt{x} - \frac{9}{2\sqrt{x}} + 4x^{1,5} + 5\sqrt{x}$

$= 5x^{1,5} - 7{,}5\sqrt{x} - \frac{9}{2\sqrt{x}}$

$g(x) = 2x^{2,5} + 5x^{1,5} - 9\sqrt{x}$ (ausmultipliziert)

$g'(x) = 5x^{1,5} + 7{,}5\sqrt{x} - \frac{9}{2\sqrt{x}}$

c) $h_k(x) = \frac{kx^5 - 4x^2}{x^3} = kx^2 - \frac{4}{x}$

$h_k'(x) = 2kx + \frac{4}{x^2}$

d) $p_k(x) = \frac{\sqrt{x^n}}{2k^2}(x^2 - 4kx) = \frac{x^{\frac{1}{2}n+2}}{2k^2} - \frac{2x^{\frac{1}{2}n+1}}{k}$

↓ Produktregel

$p_k'(x) = \frac{1}{2k^2} \cdot \frac{1}{2}n\, x^{\frac{1}{2}n-1}(x^2-4kx) + \frac{\sqrt{x^n}}{2k^2}(2x-4k)$

$= \frac{n}{4k^2}x^{\frac{1}{2}n+1} - \frac{n}{k}x^{\frac{1}{2}n} + \frac{1}{k^2}x^{\frac{1}{2}n+1} - \frac{2}{k}x^{\frac{1}{2}n}$

$= \frac{n+4}{4k^2}x^{\frac{1}{2}n+1} - \frac{n+2}{k}x^{\frac{1}{2}n}$

Ableitung nach Ausmultiplizieren → Potenzregel

$$p'_k(x) = \left(\tfrac{1}{2}n+2\right) \cdot \frac{1}{2k^2} \, x^{\frac{1}{2}n+1} - \frac{2}{k}\left(\tfrac{1}{2}n+1\right) x^{\frac{1}{2}n}$$

$$= \left(\frac{n}{4k^2} + \frac{1}{k^2}\right) x^{\frac{1}{2}n+1} - \left(\frac{n}{k} + \frac{2}{k}\right) x^{\frac{1}{2}n}$$

$$= \frac{n+4}{4k^2} \, x^{\frac{1}{2}n+1} - \frac{n+2}{k} \, x^{\frac{1}{2}n}$$

Alternative (Variation):

$$p_k(x) = \frac{\sqrt{x^{2n}}}{2k^2}\left(x^2 - 4kx\right) = \frac{1}{2k^2} \cdot x^n \left(x^2 - 4kx\right)$$

$$= \frac{1}{2k^2} x^{n+2} - \frac{2}{k} x^{n+1}$$

Produktregel:

$$p'_k(x) = \frac{n}{2k^2} x^{n-1}\left(x^2 - 4kx\right) + \frac{1}{2k^2} x^n \left(2x - 4k\right)$$

$$= \frac{n}{2k^2} x^{n+1} - \frac{2n}{k} x^n + \frac{1}{k^2} x^{n+1} - \frac{2}{k} x^n$$

$$= \frac{n+2}{2k^2} x^{n+1} - \frac{2n+2}{k} x^n$$

Ausmultiplizieren + Potenzregel:

$$p'_k(x) = \frac{n+2}{2k^2} x^{n+1} - \frac{2}{k}(n+1)\, x^n$$

② a) $f_a(x) = x^2(2a - x^2) = 2ax^2 - x^4$

$f'_a(x) = 4ax - 4x^3$

$f''_a(x) = 4a - 12x^2$

$f'''_a(x) = -24x$

b) $f'_a(x) = 4ax - 4x^3 = 0 \leadsto 4x(a - x^2) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{a}$

$f''_a(x) = 4a - 12x^2$

$f''_a(0) = 4a > 0$ wegen Vor. $a > 0 \leadsto TP(0/0)$

$\Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{a}$ ist HP wegen Stetigkeit & Symmetrie

$TP(0/0) \qquad HP(\pm\sqrt{a}/a^2)$

WP: $f''_a(x) = 0 \leadsto 4a - 12x^2 = 0 \leadsto x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}a} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3a}$

$f'''_a(x) = -24x \leadsto f_a(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3a}) \neq 0 \leadsto 2$ WP (!)

c) $x = \pm\sqrt{a} \leadsto x^2 = a$

$y = a^2 \leadsto y = x^4$

③ $f_s(x) = sx^3 - (s+1)x = x(sx^2 - s - 1)$

a) $f'_s(x) = 3sx^2 - (s+1)$

$f'_s(x) = 3sx^2 - s - 1$

$f''_s(x) = 6sx$

b) $f'_s(x) = 0 \rightsquigarrow 3sx^2 - s - 1 = 0$

$x^2 = \frac{s+1}{3s}$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{s+1}{3s}}$

$f''_s(x) = 6sx \rightsquigarrow f''_s\left(\sqrt{\frac{s+1}{3s}}\right) = 6 \cdot s \cdot \sqrt{\frac{s+1}{3s}} > 0$
wegen $s > 0$

$\Rightarrow$ TP in $x = \sqrt{\frac{s+1}{3s}}$

c) Funktionswert HP: $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ (wegen Punktsymmetrie)

$y = -\sqrt{\frac{s+1}{3s}}\left(s \cdot \frac{s+1}{3s} - s - 1\right) = -\sqrt{\frac{s+1}{3s}}\left(\frac{2}{3}s + \frac{2}{3}\right)(-1)$

$HP\left(-\sqrt{\frac{s+1}{3s}} \,\Big/\, \sqrt{\frac{s+1}{3s}}\left(\frac{2}{3}s + \frac{2}{3}\right)\right) \Rightarrow HP\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} \,\Big/\, \sqrt{2}\right)$

e) $S = 1$: äußere Kurve
$S = 3$: innere Kurve
w TP

f) Aufgrund negativen Leitkoeffizient ($s < 0$) wird der Verlauf der Fkt. in achsengespiegelter Form zum Verlauf $s > 0$ dargestellt; die Grundeigenschaften bleiben; der HP wird zum TP und umgekehrt.

d) Tangente

$f_s(1) = -1 \rightsquigarrow P(1/-1)$

$f'_s(1) = 2s-1 = m$

$-1 = (2s-1)\cdot 1 + b \rightsquigarrow b = -2s$

$t_s(x) = (2s-1)x - 2s$

Normale

$P(1/-1)$

$$m_t \cdot m_n = -1$$

$$(2s-1)\cdot m_n = -1$$

$$m_n = -\frac{1}{2s-1}$$

$$-1 = -\frac{1}{2s-1}\cdot 1 + c$$

$$c = \frac{1}{2s-1} - 1$$

$$c = \frac{1-2s+1}{2s-1}$$

$$c = \frac{2-2s}{2s-1}$$

$$n(x) = -\frac{1}{2s-1}x + \frac{2-2s}{2s-1}$$

④ a) Achsensymmetrie da gilt: $f_k(-x) = f_k(x)$

b) Nachweis durch
→ Ausmultiplizieren der Linearfaktor-Fkt.
→ NS-Berechnung der Polynomdarstellung und Umformung in Linearfaktordarstellung

Polynomdarstellung: Vorteile beim Ableiten + Lagebestimmung
Linearfaktordarstellung: Vorteile bei NS-Berechnung

c) $f_k(x) = \frac{1}{9}(x^2-k)(x^2-9) = 0$

$x_{1/2} = \pm\sqrt{k} \quad \vee \quad x_{3/4} = \pm 3$

$\Rightarrow k \neq 9$: alle NS einfach
$\Rightarrow k = 9$: beide NS doppelt

d) f_{k_1} gehört zu $k=9$, da doppelte NS
f_{k_2} gehört zu $k=0$, wegen y-Achsenabschnitt

e) $f'_k(x)$ entsteht aus Grundregel der Ableitung von Potenzfkt. mit Konstanten $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = k \cdot x^0 \rightarrow f'(x) = k \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$

$f''_k(x)$ durch Ableiten von $f'_k(x)$ und Ausmultiplizieren

$f''_k(x) = \frac{12}{9}x^2 - 2\left(\frac{k}{9}+1\right) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}k - 2$

f) $f_k'(x) = x\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{2}{9}k - 2\right) = 0$

$x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{4}{9}x^2 = \frac{2}{9}k + 2 \qquad \Big| \cdot \frac{9}{4}$

$x^2 = \frac{1}{2}k + \frac{9}{2}$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{\frac{k+9}{2}} \qquad \Big|$ Erweitern $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$x_{2/3} = \pm \frac{\sqrt{k+9} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$

$x_{2/3} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2k+18}$

ja, bei $x = 0$

g) $f_k''(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}k - 2 \leadsto f_k''(0) = -\frac{2}{9}k - 2 = 0$

$k = -9$

bei $x = 0 \iff k \neq -9 \quad \leadsto f_k'''(x) = \frac{8}{3}x \leadsto f_k'''(0) = 0$

$f_k''\left(\pm\sqrt{\frac{k+9}{2}}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{k+9}{2} - \frac{2}{9}k - 2 = \frac{2}{3}k + 6 - \frac{2}{9}k - 2$

$= \frac{4}{9}k + 4 = 0 \leadsto k = -9$

bei $|x| = \sqrt{\frac{k+9}{2}} \iff k \neq -9$

h) Fall 1: $k = -9 \Rightarrow$ ein Extremum bei $x = 0$

Fall 2: $2k + 18 > 0$

$2k > -18$

$k > -9 \Rightarrow$ 3 Extrema

Fall 3: $k < -9 \Rightarrow$ ein Extremum bei $x = 0$