13. Jgst./Kurs M LK 2	5. Test	Datum: 11.02.2021
Fach: Mathematik (Leistungsfach)		

Name:	
Punkte:	Note:

Themen: Logarithmus: Gleichungen & Kurvenuntersuchung

Bitte geben Sie Ansätze und Rechenwege an!

Aufgabe 1: Gleichungen - Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\ln(5x+12)+\ln(5x-12)=\ln 81$$

Lösung:

$D=\{x \mid x\in\mathbb{R} \wedge x>2{,}4\}$

$\ln(5x+12)\cdot(5x-12)=\ln 81 \quad\rightarrow\quad 25x^2-144=81 \quad\rightarrow\quad 25x^2=225 \quad\rightarrow\quad |x|=3 \quad\rightarrow\quad L=\{3\}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die 1. Ableitung der Funktion

a) $f(x)=\ln(x^2-2x)^3$ b) $f(x)=x^3+\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$

Lösung:

a)

$$f(x)=\ln(x^2-2x)^3=3\ln(x^2-2x) \quad\rightarrow\quad f'(x)=3\cdot\frac{1}{x^2-2x}\cdot(2x-2)=\frac{6x-6}{x^2-2x}$$

$Alt1:$ ohne Exponent als Faktor

$$f'(x)=\frac{1}{(x^2-2x)^3}\cdot 3\cdot(x^2-2x)^2\cdot(2x-2)=w.o.$$

Schülerfrage bzgl. Exponent :

$$g(x)=\left[\ln(x^2-2x)\right]^3$$

$$g'(x)=3\left[\ln(x^2-2x)\right]^2\cdot\frac{1}{(x^2-2x)}\cdot(2x-2)=\left[\ln(x^2-2x)\right]^2\cdot\frac{6x-6}{x^2-2x}$$

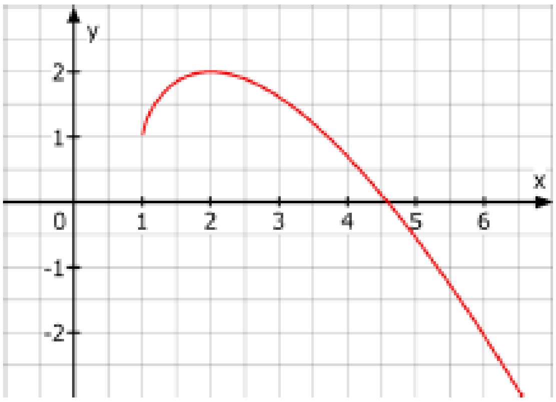
b)

$$f(x)=x^3+\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=x^3+\ln(x-1)-2\ln x \quad\rightarrow\quad f'(x)=3x^2+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}$$

Aufgabe 3: **Nullstelle begründen**

Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f(x) mit

$$f(x) = x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$$



a) Geben Sie zwei Gründe an, die darlegen, dass die Funktion nur eine Nullstelle besitzt.

b) Zeigen Sie zudem, dass die Nullstelle im Intervall [4 ; 5] liegt.

Lösung:

a)
- ⇨ Keine Symmetrie;
- ⇨ Definitionsbereich;
- ⇨ globales Maximum/Extremwert mit danach stetig und streng monoton fallendem Verlauf;
- ⇨ Grenzwert für x gg unendlich geht gegen minus unendlich

b)

$$f(x) = x - (x-1)\cdot\ln(x-1)$$

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= 4-(4-1)\cdot\ln(4-1) = 4-3\ln(3) \approx 0{,}7 > 0 \\ f(5) &= 5-(5-1)\cdot\ln(5-1) = 5-4\ln(4) \approx -0{,}55 < 0 \end{aligned}\right\}$$

=> Funktion ist in [4 ; 5] stetig und daher muss eine Nullstelle im Intervall liegen

=> Vorzeichenwechsel bei Funktionswerten

Aufgabe 4: **Kurvendiskussion**

Gegeben ist folgende Scharfunktion: $f_t(x) = \ln\left(x^2 - tx + 16\right) \quad mit\ t \geq 0$

4.1 Untersuchen Sie die Funktion für **t = 0** bezüglich folgender Sachverhalte:

a) Definitionsbereich

b) Symmetrie

c) Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs

d) Extrema (vollständige Betrachtung)

e) Wende**stellen mit Steigung** (notw. Bed. genügt)

Lösung:

$$f_0(x) = \ln\left(x^2+16\right)$$

$$D = \mathbb{R} \quad da\ gilt: x^2+16 > 0 \xrightarrow{\forall x\in\mathbb{R}} x^2 > -16$$

$$Symmetrie: \quad f_0(-x) = \ln\left((-x)^2+16\right) = \ln\left(x^2+16\right) = f_0(x) \quad \rightarrow \quad AS$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_0(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(x^2+16\right) \to \infty$$

$$\text{Extremum:}$$

$$f_0'(x)=\frac{2x}{x^2+16}=0 \;\rightarrow\; 2x=0 \;\rightarrow\; \left.x=0\right\}\text{notwendig} \;\rightarrow\; f_0(0)=\ln 16\approx 2{,}77$$

$$f_0''(x) = \frac{2\cdot(x^2+16)-2x\cdot 2x}{(x^2+16)^2} = \frac{2x^2+32-4x^2}{(x^2+16)^2} = \frac{-2x^2+32}{(x^2+16)^2} \quad \Big\}\text{hinreichend}$$

$$f_0''(x) = \frac{32}{256}>0 \;\rightarrow\; TP/Min(0\mid \ln 16)$$

$$\text{Wendestellen}$$

$$f_0''(x) = \frac{-2x^2+32}{(x^2+16)^2} = 0 \;\rightarrow\; -2x^2+32 = 0 \;\rightarrow\; |x|=4$$

$$\text{Steigung:}$$

$$f_0'(4)=\frac{8}{16+16}=0{,}25 \quad \text{und} \quad f_0'(-4)=\frac{-8}{16+16}=-0{,}25$$

4.2 Für welchen Wert von **t > 0**, besitzt die Funktion genau eine Nullstelle?

Lösung:

$$f_t(x)=\ln\left(x^2-tx+16\right) = 0 \;\rightarrow\; x^2-tx+16 = e^0=1 \;\rightarrow\; x^2-tx+15 = 0$$

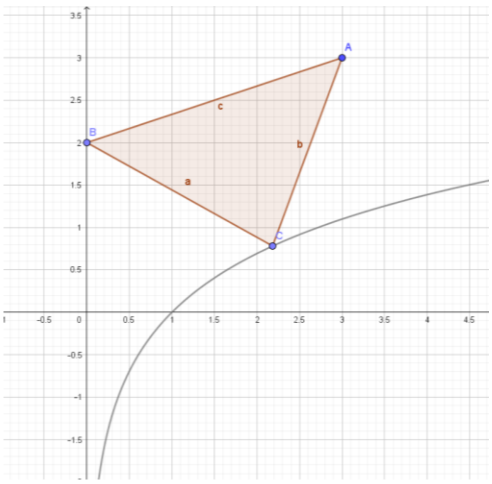
$$x_{1/2}=\frac{1}{2}t\pm\sqrt{\frac{1}{4}t^2-15} \xrightarrow{\text{Diskriminante}=0} \frac{1}{4}t^2-15=0 \;\rightarrow\; t=\pm\sqrt{60} \xrightarrow{\text{wegen } t>0} t=\sqrt{60}$$

Zusatzaufgabe: **Extremwertaufgabe**

Die Punkte A(3|3) und B(0|2) sind gegeben; der Punkt C liegt auf der Kurve $f(x)=\ln(x)$.
Das Dreieck ABC soll minimalen Flächeninhalt haben. Welche Koordinaten hat C?

Anmerkung: Vielleicht hilft Ihnen die Formelsammlung Seite 19 weiter 😉

Lösung:



$$A_\Delta(x)=\frac{1}{2}\cdot Det\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\\ x & \ln x & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot Det\left(\begin{array}{ccc|c|c}0 & 2 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3\\ x & \ln x & 1 & x & \ln x\end{array}\right)$$

$$A_\Delta(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[0+2x+3\ln x-3x-0-6\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[3\ln x-x-6\right]$$

$$A_\Delta'(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{3}{x}-1\right]=0$$

$$\rightarrow\; \frac{3}{x}-1=0 \;\rightarrow\; \frac{3}{x}=1 \;\rightarrow\; x=3 \;\rightarrow\; C(3\mid \ln 3)$$