Stochastische Matrix / Statisches GG

$$U=\begin{pmatrix} a & b & 0,2 \\ a & 2b & 0,7 \\ 0,5 & 5b & c \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a=0,25 \\ b=0,125 \\ c=0,1 \end{matrix}$$

$$U\cdot\overrightarrow{p_{2018}}=\overrightarrow{p_{2019}}$$

$$\textit{Statisches GG}:\quad U\cdot\vec{x}=\vec{x} \quad\rightarrow\quad (U-E)\cdot\vec{x}=\vec{0} \quad\rightarrow$$

$$U=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,125 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 & 0,7 \\ 0,5 & 0,625 & 0,1 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad (U-E):\ \begin{pmatrix} -0,75 & 0,125 & 0,2 \\ 0,25 & -0,75 & 0,7 \\ 0,5 & 0,625 & -0,9 \end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -0,75 & 0,125 & 0,2 \\ 0,25 & -0,75 & 0,7 \\ 0,5 & 0,625 & -0,9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Binomialverteilung

Überraschungseier

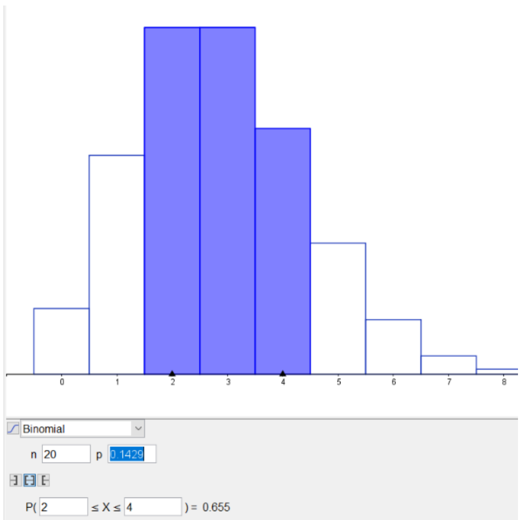
70 Ü-Eier   1/7 der Eier befindet sich eine Figur – im Rest keine Figur

Ziehen von n = 20 Eiern

Genau 2 Figuren: $$B_{20;\frac{1}{7}}(X=2)=\binom{20}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^{2}\left(\frac{6}{7}\right)^{18}$$

Mehr als 1 und weniger als 5

$$B_{20;\frac{1}{7}}(1<X<5)$$
$$=B_{20;\frac{1}{7}}(2\le X\le 4)=B(X=2)+B(X=3)+B(X=4)$$
$$=B_{20;\frac{1}{7}}(2\le X\le 4)=B(X\le 4)-B(X\le 1)$$
$$=0,655$$



Die Wahrscheinlichkeit für 3 Treffer beträgt 0,3:

$$B_{20;p}(X=3)=0,2 \quad\rightarrow\quad \binom{20}{3}p^{3}(1-p)^{17}=0,2 \quad\rightarrow\quad 1140p^{3}(1-p)^{17}=0,2 \quad\rightarrow\quad p=0,104$$

Wie oft muss man Ziehen, um mindestens eine Figur mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 90 % zu erhalten?

$$B_{n;\frac{1}{7}}(X \geq 1) \geq 0{,}9$$

$$1 - B_{n;\frac{1}{7}}(X = 0) \geq 0{,}9 \xrightarrow[\cdot(-1)]{-1} B_{n;\frac{1}{7}}(X = 0) \leq 0{,}1$$

$$\to \binom{n}{0}\left(\frac{1}{7}\right)^0\left(\frac{6}{7}\right)^n \leq 0{,}1 \xrightarrow[\left(\frac{1}{7}\right)^0=1]{\binom{n}{0}=1} \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq 0{,}1$$

$$\xrightarrow{\ln} n \cdot \ln\left(\frac{6}{7}\right) \leq \ln 0{,}1 \xrightarrow{:\ln\left(\frac{6}{7}\right)<0} n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln\left(\frac{6}{7}\right)} \approx 14{,}94 \to 15$$

$$\log_2\left(\frac{6}{7}\right)^n \leq \log_2 0{,}1 \quad \to \quad n = \frac{\log_2 0{,}1}{\log_2\left(\frac{6}{7}\right)}$$

Ergebnis:

Man muss mindestens 15 Mal Ziehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mind. 90 % mind. eine Figur zu ziehen.

Sigma-Intervall / Erwartungswert / Standardabweichung

70 Ü-Eier 1/7 der Eier befindet sich eine Figur – im Rest keine Figur

Erwartungswert:

$$E(X) = \mu = n \cdot p \quad \to \quad \mu = 70 \cdot \frac{1}{7} = 10$$

$$Varianz:$$

$$V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) \quad \to \quad \sigma^2 = 10 \cdot \frac{6}{7} = 8{,}57$$

$$S\tan dardabweichung:$$

$$S(X) = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \quad \to \quad \sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{6}{7}} = \sqrt{8{,}57} \approx 2{,}93$$

$$Sigma - Intervall:$$

$$P(7 \leq X \leq 13) \overset{symmetrisch}{=} P(10-3 \leq X \leq 10+3) = P(|X-10| \leq 3) = 0{,}7702$$

Sigma-Regeln:

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße/-variable X mit den Parametern n und p,
dem Erwartungswert $\mu(X) \;=\; n \cdot p$

und der Standardabweichung $\sigma(X) \;=\; \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ **mit der Bedingung** $\sigma(X) > 3$
erhält man folgende Näherungen:

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le \sigma) \;=\; 0{,}683$$

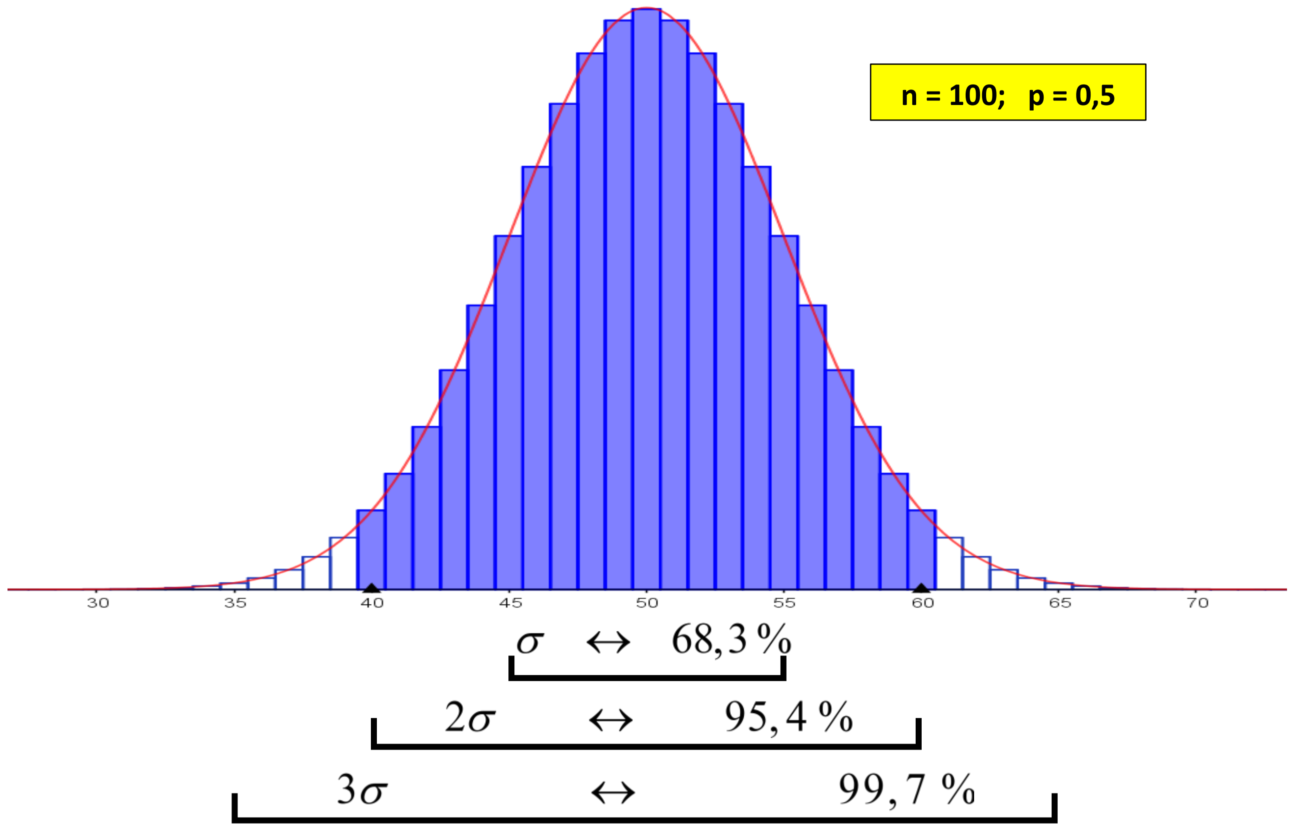
$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le 2\sigma) \;=\; 0{,}954$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le 3\sigma) \;=\; 0{,}997$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le 1{,}64\sigma) \;=\; 0{,}90$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le 1{,}96\sigma) \;=\; 0{,}95$$

$$P(k_1 \le X \le k_2) \overset{symmetrisch}{=} P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \;=\; P(|X - \mu| \le 2{,}58\sigma) \;=\; 0{,}99$$



Bezogen auf die Standardnormalverteilung:

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 95%-Umgebung: $\pm 1{,}96\sigma\; [Tabelle: 0{,}975]$

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 90%-Umgebung: $\pm 1{,}64\sigma\; [Tabelle: 0{,}95]$

$\rightarrow$ Sigma-Intervall für 99%-Umgebung: $\pm 2{,}58\sigma\; [Tabelle: 0{,}995]$

$$f(x)=e^{x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x$$

$$f(x)=e^{\frac{1}{x^2}} \quad \rightarrow \quad f'(x)=e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2)x^{-3}=-e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x^2}} \quad \rightarrow \quad 1$$

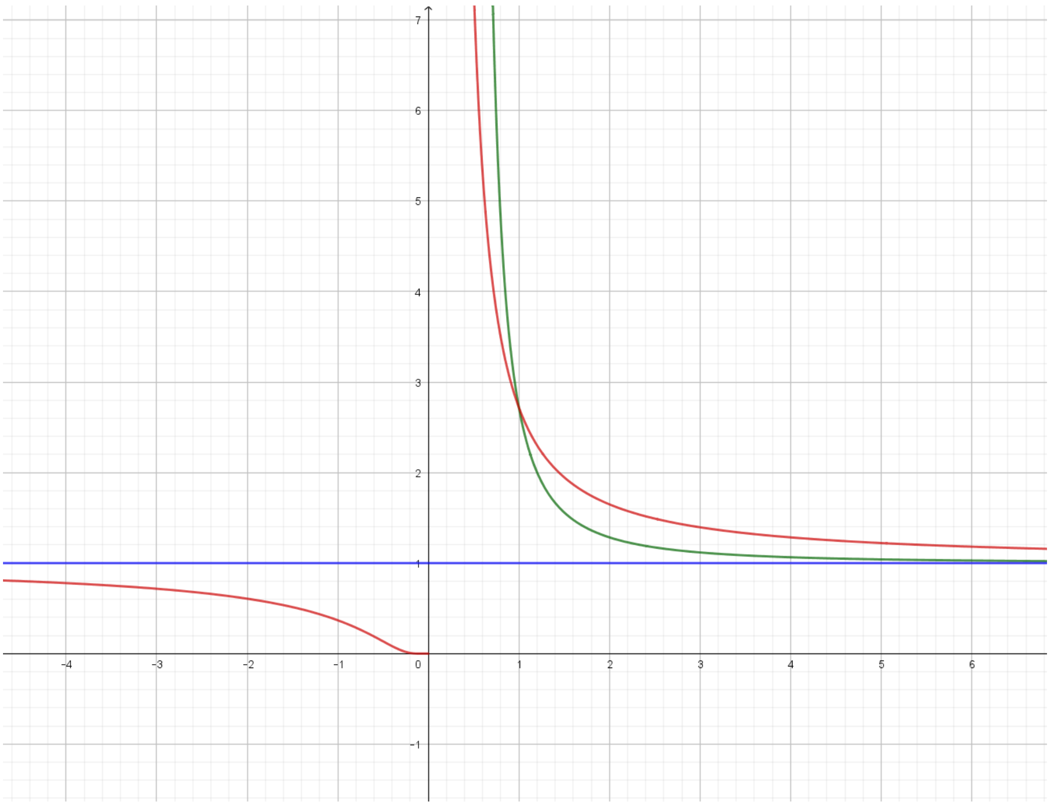
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \quad \rightarrow \quad \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad \infty \quad \rightarrow \quad z.B.: \quad e^{\frac{1}{0{,}001}}=e^{1000} \quad \rightarrow \quad \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad 0 \quad \rightarrow \quad z.B.: \quad e^{\frac{1}{-0{,}001}}=e^{-1000} \quad \rightarrow \quad 0$$



p(giftig) = 0,3   n = 30 Pilze im Korb

$$B_{30;0,3}\left(X \le 1\right) = B_{30;0,3}\left(X = 1\right) + B_{30;0,3}\left(X = 0\right) = 0,0003$$

$$P\left(Gegenereignis\right) = 1 - 0,0003$$

$$P\left(Gegenereignis\right) = 1 - B_{30;0,3}\left(X \le 1\right) = B_{30;0,3}\left(X \ge 2\right)$$

Mindestens zwei giftige Pilze

Stochastische Matrizen - Populationsmodell

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \quad 0,6 \cdot 0,3 \cdot k = 1 \quad \rightarrow \quad k = \frac{1}{0,18} \approx 5,55$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,55 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,55 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5,55 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz von Bayes:

Grundlage: Totale Wahrscheinlichkeit

Produktionslinie:

Werk 1:	30 %	Fehlerquote Werk 1: 4 %
Werk 2:	50 %	Fehlerquote Werk 2: 2 %
Werk 3:	20 %	Fehlerquote Werk 3: 6 %

Wahrscheinlichkeit für fehlerfreies Produkt:

$$P\left(fehlerfrei\right) = 0,3 \cdot 0,96 + 0,5 \cdot 0,98 + 0,2 \cdot 0,94 = 0,966$$

$$P\left(fehler\right) = 1 - 0,966 = 0,034$$

$$P\left(fehlerfrei\right) = P_{Werk\,1}\left(fehlerfrei\right) + P_{Werk\,2}\left(fehlerfrei\right) + P_{Werk\,3}\left(fehlerfrei\right)$$

Ein Produkt wird geprüft – es ist fehlerhaft – mit welcher W'keit kommt es aus Werk 2?

$$P_{fehler}\left(Werk\ 2\right) = \frac{P\left(fehler \cap Werk2\right)}{P\left(fehler\right)} = \frac{P\left(fehler \cap Werk2\right)}{P\left(fehler \cap Werk1\right) + P\left(fehler \cap Werk2\right) + P\left(fehler \cap Werk3\right)}$$

$$P_{fehler}\left(Werk\ 2\right) = \frac{P\left(fehler \cap Werk2\right)}{P\left(fehler\right)} = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,3 \cdot 0,04 + 0,5 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,06}$$

$$P_{fehler}\left(Werk\ 2\right) = \frac{0,01}{0,034} = 0,294$$