Stochastische (Un)Abhängigkeit

1.) A und B seien zwei stochastisch unabhängige Ereignisse mit
$P(A)=0,2 \quad und \quad P(A\cup B)=0,5$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(B)$ b) $P(A\cap\overline{B})$ c) $P(\overline{A}\cap B)$

Lösung:

Es gilt wegen "stochastisch unabhängig": $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$

Zudem der Additionssatz in Abhängigkeit der stachast. Unabhängigkeit:

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B) \quad mit \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$\rightarrow \quad P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=P(A\cup B) \quad \rightarrow \quad 0,2+P(B)-0,2\cdot P(B)=0,5$$

$$\xrightarrow[-0,2]{P(B)\ zusammenfassen} \quad 0,8\cdot P(B)=0,3 \quad \xrightarrow{:0,8} \quad P(B)=\frac{3}{8}=0,375$$

$$\rightarrow \quad P(\overline{B})=1-P(B) \quad \rightarrow \quad P(\overline{B})=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}=0,675$$

$$\xrightarrow[Unabhängigkeit\ gilt]{wegen\ stoch.} \quad P(A)\cdot P(\overline{B})=P(A\cap\overline{B}) \quad \rightarrow \quad P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{8}=\frac{1}{8}=0,125$$

$$\rightarrow \quad P(\overline{A})=1-P(A) \quad \rightarrow \quad P(\overline{A})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0,8$$

$$\xrightarrow[Unabhängigkeit\ gilt]{wegen\ stoch.} \quad P(\overline{A})\cdot P(B)=P(\overline{A}\cap B) \quad \rightarrow \quad P(\overline{A}\cap B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{10}=0,3$$

2.) Drei Kinder werfen auf ein Ziel. Sie treffen dieses unabhängig voneinander
mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$ *und* $\frac{4}{5}$. Jeder wirft einmal.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird

a) das Ziel getroffen? b) das Ziel genau zweimal getroffen?

Lösung:

a) A: Ziel wird mind. einmal getroffen => Gegenereignis: $\overline{\text{A}}$ = Ziel wird nie getroffen

$$\rightarrow \quad P(A)=1-P(\overline{A}) \quad \rightarrow \quad P(A)=1-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=P(A)=1-\frac{3}{125}=\frac{122}{125}$$

b) B: Ziel wird genau zweimal getroffen => jeweils einer trifft nicht

$$\rightarrow \quad P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{56}{250}+\frac{36}{250}+\frac{21}{250}=\frac{113}{250}$$

3.) Die Tennisabteilung eines Vereins besteht zu 64 % aus männlichen Mitgliedern (M). Der Anteil der Linkshänder (L) in der gesamten Abteilung beträgt 8 %.
Eine linkshändig spielende Frau trifft man nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 2 % an.

a) Entwerfen Sie eine vollständige Vierfeldertafel.
b) Sind die Ereignisse M und L stochastisch unabhängig?

Lösung:

	Linkshänder = $P(L)$	**Rechtshänder =** $P(\overline{L})$	**Summe**
Männer = $P(M)$	**0,06**	**0,58**	**0,64**
Frauen = $P(\overline{M})$	**0,02**	**0,34**	**0,36**
Summe	**0,08**	**0,92**	**1**

$Bedingung: \quad P(M)\cdot P(L) = P(M \cap L) \quad \rightarrow \quad 0{,}64 \cdot 0{,}08 = 0{,}0512 \neq 0{,}06$

$Antwort: \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})$ und $\mathrm{P}(\mathrm{L})$ sind stochastisch abhängig.

4.) Bei der Produktion eines Kinderspielzeugs sind zwei Fehler aufgetreten. 10 % der Produktion haben einen Funktionsfehler (F_1), 20 % einen Farbfehler (F_2).
75 % aller Stücke sind einwandfrei.
Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel und prüfen Sie das Auftreten der Fehler auf stochastische Unabhängigkeit.

Lösung:

	Funktionsfehler = $P(F_1)$	**Kein Funktionsfehler =** $P(\overline{F_1})$	**Summe**
Farbfehler = $P(F_2)$	**0,05**	**0,15**	**0,2**
Kein Farbfehler = $P(\overline{F_2})$	**0,05**	**0,75**	**0,8**
Summe	**0,1**	**0,9**	**1**

$Bedingung: \quad P(F_1)\cdot P(F_2) = P(F_1 \cap F_2) \quad \rightarrow \quad 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 \neq 0{,}05$

$Antwort: \quad \mathrm{P}(\mathrm{F_1})$ und $\mathrm{P}(\mathrm{F_2})$ sind stochastisch abhängig.

5.) Um die Funktionssicherheit eines Kernkraftwerkes zu erhöhen, ist das Kühlsystem für ein Bauteil in dreifacher Ausfertigung, wobei die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kühlsystems jeweils 0,1 beträgt.
Die drei Kühlsysteme arbeiten unabhängig voneinander.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeitet in einem Störfall keines der drei Systeme?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit arbeiten zwei der drei Systeme?

Lösung:

a) A: Keines der drei Kühlsysteme arbeitet

$\rightarrow \quad P(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$

b) B: Genau zwei der drei System arbeiten => jeweils eines funktioniert nicht

$\rightarrow \quad P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}081$

6.) Tankstellenbesitzer Toni Tankwart weiß aus Erfahrung, dass 30 % seiner Kunden Superbenzin tanken, wobei 40 % von diesen die Automarke M fahren.
Außerdem weiß er, dass 42 % aller seiner Kunden weder Fahrer der Marke M sind noch Superbenzin tanken.

a) Entwerfen Sie eine vollständige Vierfeldertafel.
b) Sind die Ereignisse S („Tanken von Superbenzin“) und M („Fahren der Automarke M) stochastisch unabhängig?

Lösung:

	„Super“ = $P(S)$	**Nicht „Super“ =** $P(\overline{S})$	**Summe**
Marke M = $P(M)$	**0,3*0,4 = 0,12**	**0,28**	**0,4**
Nicht Marke M = $P(\overline{M})$	**0,18**	**0,42**	**0,6**
Summe	**0,3**	**0,7**	**1**

$Bedingung: \quad P(M) \cdot P(S) = P(M \cap S) \quad \rightarrow \quad 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12 = 0{,}12$

$Antwort: \quad \mathrm{P}(\mathrm{M})$ und $\mathrm{P}(\mathrm{S})$ sind stochastisch unabhängig.

7.) Bei der Produktion von Weckeruhren treten unabhängig voneinander die Fehler F_1 (Zeiger lose) mit einer Wahrscheinlichkeit von 7 % und F_2 (Quarz schwingt nicht) mit 2 % Wahrscheinlichkeit auf.

Ein Kunde kauft einen solchen Wecker. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

a) treten beide Fehler auf?

b) tritt mindestens ein Fehler auf?

c) tritt genau einer der beiden Fehler auf?

d) tritt kein Fehler auf?

Lösung:

	„Zeiger lose" = $P(F_1)$	**„Zeiger fest" = $P(\overline{F_1})$**	**Summe**
Quarzfehler = $P(F_2)$	**0,0014**	**0,0186**	**0,02**
Kein Quarzfehler = $P(\overline{F_2})$	**0,0686**	**0,9114**	**0,98**
Summe	**0,07**	**0,93**	**1**

$\mathit{Voraussetzung\ lt.\ Aufgabenstellung:}\quad P(F_1)\cdot P(F_2)=P(F_1\cap F_2)$

$\Rightarrow\quad \mathrm{P}(\mathrm{F}_1)$ und $\mathrm{P}(\mathrm{F}_2)$ sind stochastisch unabhängig.

$a)\quad P(F_1)\cdot P(F_2)=P(F_1\cap F_2)\ \rightarrow\ 0{,}07\cdot 0{,}02=0{,}0014=P(F_1\cap F_2)$

$b)\quad P(\text{"mind. ein Fehler"})=1-P(\text{"kein Fehler"})\ \rightarrow\ 1-P\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\right)\ \rightarrow\ 1-0{,}9114=0{,}0886$

$c)\quad P\left(F_1\cap\overline{F_2}\right)+P\left(\overline{F_1}\cap F_2\right)=0{,}0686+0{,}0186=0{,}0872$

$d)\quad P(\text{"kein Fehler"})\ \rightarrow\ P\left(\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\right)=0{,}9114$

8.) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler innerhalb eines Jahres die Krankheit „Lustlosigkeit" bekommt, ist 0,3 –
die für die Krankheit „Behämmert" ist 0,2.

Fall 1:

Das Auftreten der Krankheiten ist ein unabhängiges Ereignis.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler innerhalb eines Jahres an einer der beiden Krankheiten leiden wird?

Lösung:

	„Lustlos" = $P(L)$	**„Motiviert" = $P(\overline{L})$**	**Summe**
„Behämmert" = $P(B)$	**0,2*0,3 = 0,06**	**0,14**	**0,2**
„Normal" = $P(\overline{B})$	**0,24**	**0,56**	**0,8**
Summe	**0,3**	**0,7**	**1**

$\mathit{Voraussetzung\ lt.\ Aufgabenstellung:}\quad P(B)\cdot P(L)=P(B\cap L)$

$\Rightarrow\quad P(B)$ und $P(L)$ sind stochastisch unabhängig.

$P(B\cup L)=P(B)+P(L)-P(B\cap L)\ \rightarrow\ P(B\cup L)=0{,}2+0{,}3-0{,}06=0{,}44$

Fall 2:

Das Auftreten der Krankheiten ist ein abhängiges Ereignis.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schüler innerhalb eines Jahres an einer der beiden Krankheiten leiden wird, wenn die Wahrscheinlichkeit für beide Krankheiten gleichzeitig bei 0,1 liegt?

Lösung:

	„Lustlos“ = $P(L)$	**„Motiviert“ =** $P(\overline{L})$	**Summe**
„Behämmert“ = $P(B)$	**0,1**	**0,1**	**0,2**
„Normal“ = $P(\overline{B})$	**0,2**	**0,6**	**0,8**
Summe	**0,3**	**0,7**	**1**

Voraussetzung lt. Aufgabenstellung : $P(B)\cdot P(L)\neq P(B\cap L)$

=> $P(B)$ und $P(L)$ sind stochastisch abhängig.

$P(B\cup L)=P(B)+P(L)-P(B\cap L) \quad \rightarrow \quad P(B\cup L)=0,2+0,3-0,1=0,4$

9.) In einem Kurs beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Langschläfer 60 % und für einen Raucher 30 %. Die beiden Merkmale treten unabhängig voneinander auf.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler

a) Langschläfer und Raucher ist?
b) Langschläfer oder Raucher ist?
c) Langschläfer, aber kein Raucher ist?

Lösung:

	Langschläfer = $P(L)$	**Nicht Langschläfer =** $P(\overline{L})$	**Summe**
Raucher = $P(R)$	**0,3*0,6 = 0,18**	**0,12**	**0,3**
Nichtraucher = $P(\overline{R})$	**0,42**	**0,28**	**0,7**
Summe	**0,6**	**0,4**	**1**

Voraussetzung lt. Aufgabenstellung : $P(R)\cdot P(L)=P(R\cap L)$

=> $P(R)$ und $P(L)$ sind stochastisch unabhängig.

$a)\quad P(R)\cdot P(L)=P(R\cap L) \quad \rightarrow \quad 0,3\cdot 0,6=0,18=P(R\cap L)$

$b)\quad P(R\cup L)=P(R)+P(L)-P(R\cap L) \quad \rightarrow \quad P(R\cup L)=0,3+0,6-0,18=0,72$

$c)\quad P(\overline{R}\cup L)\overset{Vierfeldertafel}{=}0,42$