Lösungen Kombinatorik S. 460/461

Seite 460

1 a) $2^6 = 64$ b) $4! = 24$

c) $3^5 = 243$ d) $\binom{10}{2} = 45$

2 a) $4^4 = 256$

b) (1) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{512}$

(2) $4!\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{64}$

(3) $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$

3 a) Weil jede Ziffer ein Ergebnis eines Spiels an der entsprechenden Stelle auf dem Tippschein bezeichnet.

b) Annahme: Bei jedem Spiel beträgt die Wahrscheinlichkeit für 0, 1, 2 jeweils $\frac{1}{3}$.
Dann ist die Wahrscheinlichkeit

$\left(\frac{1}{3}\right)^{11} = \frac{1}{3^{11}} = \frac{1}{177147}$

c) $2^{11} = 2048$

4 a) $6^5 = 7776$

b) „keine 6" ergibt sich in $5^5 = 3125$ Fällen.

Also ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine 6: $\frac{7776 - 3125}{7776} = \frac{4651}{7776} \approx 59{,}8\,\%$

Alternativ mit Baumdiagramm:

$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776}$.

c) $6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$

5 $12\cdot11\cdot10 = 1320$

Seite 461

8 a) $5! = 120$ b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{5\cdot4} = \frac{1}{20}$

9 a) $6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$

b) $\frac{4}{6}$ c) $\frac{1}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{15}$

10 a) $\frac{1}{\binom{45}{6}} = \frac{1}{8145060}$

b) $\binom{5}{2} = 10$ c) $\binom{1000}{2} = 499500$

11 a) $\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{4}{47}\cdot\frac{3}{46}\cdot\frac{43}{45}\cdot\frac{42}{44} = \frac{43}{665896}$

b) rrrrff, rrrfrf, rrfrrf, rfrrrf, frrrrf
rrrffr, rrfrfr, rfrrfr, frrrfr,
rrffrr, rfrfrr, frrfrr,
rffrrr, frfrrr,
ffrrrr

Es gibt $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten, die 4 r und 2 f auf 6 Stellen zu verteilen.

c) Jede Kombination aus Teilaufgabe b) hat dieselbe Wahrscheinlichkeit wie bei Teilaufgabe a). Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige also $15\cdot\frac{43}{665896} \approx 0{,}097\,\%$.

Alternative: Man tippt vier von sechs Richtigen, das geht auf $\binom{6}{4}$ Möglichkeiten, und zwei von 43 Falschen, das geht auf $\binom{43}{2}$ Möglichkeiten. Daher gibt es $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}$ Möglichkeiten, vier Richtige zu tippen. Da es insgesamt $\binom{49}{6}$ Möglichkeiten gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige $\frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$

$= \frac{645}{665896}$ (s.o.).

d) $\binom{6}{2}\cdot\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}\cdot\frac{42}{46}\cdot\frac{41}{45}\cdot\frac{40}{44} = \frac{44075}{332948} \approx 13{,}2\,\%$;

alternativ $\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{43}{4}}{\binom{49}{6}}$.

e) $\frac{\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1} + 1}{\binom{49}{6}} \approx 0{,}0186$

50 Spiele: $1 - (0{,}9814)^{50} \approx 0{,}6089$

100 Spiele: $1 - (0{,}9814)^{100} = 0{,}8470$

1000 Spiele: $1 - (0{,}9814)^{1000} \approx 0{,}9999$

12 $(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Die Koeffizienten sind Binomialkoeffizienten.

$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2$
$+ 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$

Randspalte

Das Gesetz für das Pascal'sche Zahlendreieck:
Man addiert zwei benachbarte Zahlen, um die darunterstehende Zahl zu erhalten.

Formel: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$