Aufgaben Binomialverteilung 1 – Bernoulli-Kette oder nicht?

1. Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariable binomialverteilt ist.
    1. Ein Würfel wird 20 Mal geworfen; gezählt wird die Zahl der Fünfen.
    2. Ein Würfel wird solange geworfen, bis die Fünf erscheint; gezählt wird die Anzahl der notwendigen Würfe.
    3. Aus einer Urne mit 4 blauen und 8 roten Kugeln werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen und die Anzahl der blauen Kugeln festgestellt.
2. Bei der Produktion von Mikrochips fallen 30 % Ausschuss an. Der laufenden Produktion werden vier Teile entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
    1. A : der erste und der vierte Chip sind defekt
    2. B : nur der erste und der vierte Chip sind defekt
    3. C : genau zwei Chips sind defekt
    4. D : mehr als zwei Chips sind intakt
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
    1. Bei der Produktion von elektronischen Bauteilen entsteht ein Ausschuss von 10 %. Ein Abnehmer erhält eine Lieferung von 100 Bauteilen und entnimmt zur Probe 10 Bauteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist darunter genau ein defektes Bauteil?
    2. Ein Händler erhält eine Lieferung von 100 Bauteilen, unter denen sich 10 defekte befinden. Er entnimmt 10 Bauteile. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist darunter genau ein defektes Bauteil?
4. Eine Urne enthält 8 blaue und 12 weiße Kugeln. Geben Sie jeweils ein Zufallsexperiment und ein Ereignis an, welches mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit eintritt.

a. $P(A)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$

b. $P(B)=\dfrac{\binom{8}{4}\cdot\binom{12}{4}}{\binom{20}{8}}$

c. $P(C)=\frac{8}{20}\cdot\frac{12}{19}\cdot\frac{7}{18}\cdot\frac{11}{17}$

d. $P(D)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5\cdot\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^6$

e. $P(E)=\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2$

Aufgaben Binomialverteilung 2 – Rechnen mit der Formel

1. Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt 0,486.
    1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit drei Kindern nur Jungen?
    2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit vier Kindern mehr Mädchen als Jungen?
    3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine Familie mit fünf Kindern mindestens ein Mädchen und mindestens einen Jungen?

2. Selektive Serotonin-Wiederaufnahmehemmer (ein pharmazeutischer Wirkstoff zur Behandlung von Depressionen) wirken anfänglich bei etwa 4 von 5 Patienten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Medikament bei
    1. genau vier von fünf Patienten
    2. genau acht von zehn Patienten
    3. mindestens vier von fünf Patienten Wirkung zeigt?

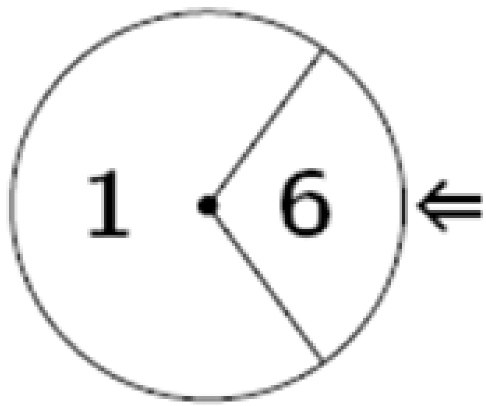
3. Ein Großhändler garantiert, dass seine Taschenrechner zu höchstens vier Prozent einen Defekt aufweisen. Ein Einzelhändler bezieht regelmäßig Geräte von ihm. Zur Überprüfung der Qualität entnimmt er eine Stichprobe von zwölf Taschenrechnern. Ist mehr als ein Gerät defekt, schickt er die Lieferung zurück.
    1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn die Angabe des Großhändlers richtig ist?
    2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sendet der Einzelhändler die Lieferung zurück, wenn sich der Anteil defekter Geräte verdoppelt hat?

4. Die Erfolgsrate für eine Ölbohrung beträgt 16 %.
    1. An einem Ort werden drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stößt man auf Öl?
    2. Erklären Sie, welche Bedeutung die Rechnung $\binom{7}{2} \cdot 0{,}16^2 \cdot 0{,}84^5 \approx 0{,}2248$ in diesem Zusammenhang hat.
    3. An fünf Orten werden je drei Bohrungen durchgeführt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man an mehr als drei Orten Öl?
    4. Wie oft muss eine Probebohrung durchgeführt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90 % mindestens eine Bohrung auf Öl stößt?

5. Silke lernt mit einem Computerprogramm Vokabeln und hat dabei eine Erfolgsquote von 93 %.
    1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kennt sie von 35 Vokabeln vier nicht?
    2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die 35. Vokabel die vierte, die sie nicht kennt?

Aufgaben Binomialverteilung 3: Arbeiten mit der Tabelle

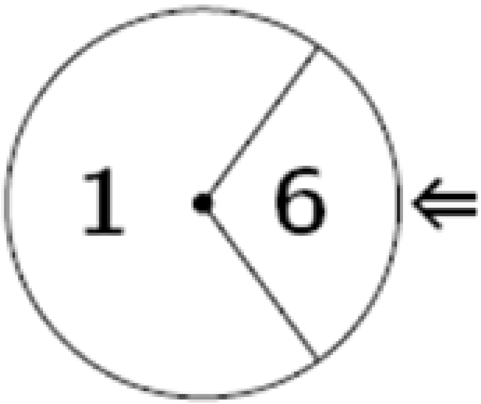
1. Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 1/3$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    1. $P(X \leq 4)$
    2. $P(X \geq 7)$
    3. $P(3 \leq X \leq 11)$
    4. $P(X > 10)$
    5. $P(5 \leq X < 8)$
    6. $P(4 < X < 16)$
2. Jemand kauft eine Packung mit 50 DVD-Rohlingen, bei denen der Brennvorgang erfahrungsgemäß in 90 % der Fälle gelingt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
    1. Höchstens 40 Brennvorgänge sind erfolgreich.
    2. Mehr als 45 Brennvorgänge sind erfolgreich.
    3. Mindestens 2, aber höchstens 8 Brennvorgänge schlagen fehl.
3. Ein Betrieb mit 50 Mitarbeitern richtet einen überdachten Fahrradparkplatz ein. Zurzeit kommen durchschnittlich 40% der Beschäftigten mit dem Fahrrad zur Arbeit.
    1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 20 Parkplätze?
    2. Wie viele Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
    3. Durch die Einrichtung der überdachten Fahrradparkplätze erhöht sich der Anteil der Radfahrer auf 60 %. Wie viele Parkplätze müssen jetzt zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
4. Das abgebildete Glücksrad zeigt die Ziffern 1 bzw. 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 bzw. 0,3 an. Es ist so konstruiert, dass der Zeiger niemals genau auf der Trennlinie zwischen zwei Sektoren stehenbleibt.



    1. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
       A: Die Ziffer 6 erscheint höchstens 25 Mal.
       B: Es erscheinen mehr Einsen als Sechsen.
       C: Die Ziffer 1 erscheint mindestens doppelt so oft wie die 6.
       D: Die Ziffer 1 erscheint bei den sowohl bei den ersten 50 Drehungen als auch bei den restlichen 50 Drehungen jeweils mindestens 35 Mal.
    2. Das Glücksrad wird nun 50-mal gedreht. Bestimmen Sie ein möglichst kleines Intervall [15-k; 15+k], so dass die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in diesem Intervall liegt.

Aufgaben Binomialverteilung 3: Arbeiten mit der Tabelle

1. Eine Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 1/3$. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:
    1. $P(X \leq 4)$
    2. $P(X \geq 7)$
    3. $P(3 \leq X \leq 11)$
    4. $P(X > 10)$
    5. $P(5 \leq X < 8)$
    6. $P(4 < X < 16)$
2. Jemand kauft eine Packung mit 50 DVD-Rohlingen, bei denen der Brennvorgang erfahrungsgemäß in 90 % der Fälle gelingt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
    1. Höchstens 40 Brennvorgänge sind erfolgreich.
    2. Mehr als 45 Brennvorgänge sind erfolgreich.
    3. Mindestens 2, aber höchstens 8 Brennvorgänge schlagen fehl.
3. Ein Betrieb mit 50 Mitarbeitern richtet einen überdachten Fahrradparkplatz ein. Zurzeit kommen durchschnittlich 40% der Beschäftigten mit dem Fahrrad zur Arbeit.
    1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reichen 20 Parkplätze?
    2. Wie viele Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
    3. Durch die Einrichtung der überdachten Fahrradparkplätze erhöht sich der Anteil der Radfahrer auf 60 %. Wie viele Parkplätze müssen jetzt zur Verfügung gestellt werden, damit diese mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % ausreichen?
4. Das abgebildete Glücksrad zeigt die Ziffern 1 bzw. 6 mit der Wahrscheinlichkeit 0,7 bzw. 0,3 an. Es ist so konstruiert, dass der Zeiger niemals genau auf der Trennlinie zwischen zwei Sektoren stehenbleibt.
    1. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
       A: Die Ziffer 6 erscheint höchstens 25 Mal.
       B: Es erscheinen mehr Einsen als Sechsen.
       C: Die Ziffer 1 erscheint mindestens doppelt so oft wie die 6.
       D: Die Ziffer 1 erscheint bei den sowohl bei den ersten 50 Drehungen als auch bei den restlichen 50 Drehungen jeweils mindestens 35 Mal.



    2. Das Glücksrad wird nun 50-mal gedreht. Bestimmen Sie ein möglichst kleines Intervall [15-k; 15+k], so dass die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % in diesem Intervall liegt.

Lösungen zu Binomialverteilung 1

1.
    1. Ja
    2. Nein: Zwar gibt es nur zwei Ausgänge (5 oder nicht) und die Wahrscheinlichkeit ändert sich nicht, aber hier ist nicht egal, zu welchem Zeitpunkt der Erfolg auftritt: er muss an letzter Stelle auftreten.
    3. Nein: beim Ziehen ohne Zurücklegen („mit einem Griff") ändert sich die Erfolgswahrscheinlichkeit.
2.
    1. P(A) = 0,09
    2. P(B) = 0,0441
    3. P(C) = 0,2646
    4. P(D) = 0,6517
3. Der Gegensatz wird hier vor allem durch die beiden Aufgabenteile klar. Wenn nur a. gefragt wird, könnte Ihr Lehrer Variante b. meinen. Die Aufgabe wäre dann – meiner Meinung nach – nicht ausreichend genau gestellt.
    1. Binomialverteilung: 100 Teile sind unwichtig, die 10% beziehen sich auf die gesamte Produktion. Das heißt nicht, dass bei den 100 Bauteilen genau 10 (= 10 % von 100) defekte sind! P(X=1) = 0,3874
    2. Hypergeometrische Verteilung („Lotto-Modell"): P(X = 1) = 0,4080
4. A: bei 5-maligem Ziehen mit Zurücklegen werden genau 3 blaue Kugeln gezogen
   B: bei 8-maligem Ziehen ohne Zurücklegen werden genau 4 blaue Kugeln gezogen
   C: bei 4-maligem Ziehen ohne Zurücklegen wird die Reihenfolge blau-weiß-blau-weiß gezogen
   D: bei 6-maligem Ziehen mit Zurücklegen werden mindestens 5 blaue Kugeln gezogen
   E: bei 5-maligem Ziehen mit Zurücklegen sind nur die ersten drei Kugeln blau
   Oft sind mehrere Varianten richtig; fragen Sie im Zweifelsfall Ihren Lehrer.

Lösungen zu Binomialverteilung 2

1. X = Anzahl der Mädchen
    1. n = 3; P(X = 0) = 0,1358
    2. n = 4; P(X = 3) + P(X = 4) = 0,2918
    3. n = 5; 1 – [P(X = 0) + P(X = 5)] = 0,9370
2. X = Anzahl der Patienten, bei denen das Medikament wirkt
    1. n = 5; P(X = 4) = 0,4096
    2. n = 10; P(X = 8) = 0,3020
    3. n = 5; P(X = 4) + P(X = 5) = 0,7373
3. X = Anzahl der defekten Taschenrechner; n = 12
    1. p = 0,04; P(X ≥ 2) = 1 – [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0,0809
    2. p = 0,08; P(X ≥ 2) = 1 – [P(X = 0) + P(X = 1)] = 0,2487

4. X = Anzahl erfolgreicher Ölbohrungen
    1. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}4073$
    2. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 22,48 % sind bei sieben Bohrungen genau zwei erfolgreich.
    3. $n = 5$; $p = 0{,}4073$ (siehe a.); $P(X \geq 4) = 0{,}0928$
    4. $P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Rightarrow n \geq 14$
5. X = Anzahl richtiger Vokabeln; $p = 0{,}93$
    1. $P(X = 31) = 0{,}1325$
    2. Von den ersten 34 Vokabeln ($n = 34$) kennt sie 3 nicht, also $X = 31$. Die letzte Vokabel kennt sie nicht. $P(X = 31) \cdot 0{,}07 = 0{,}0151$

Lösungen zu Binomialverteilung 3

1.
    1. $P(X \leq 4) = 0{,}1515$
    2. $P(X \geq 7) = 0{,}5207$
    3. $P(3 \leq X \leq 11) = 0{,}9694$
    4. $P(X > 10) = 0{,}0376$
    5. $P(5 \leq X < 8) = 0{,}5100$
    6. $P(4 < X < 16) = 0{,}8485$
2. X = Anzahl gelungener Brennvorgänge; $n = 50$; $p = 0{,}9$
    1. $P(X \leq 40) = 0{,}0245$
    2. $P(X > 45) = 0{,}4312$
    3. $P(42 \leq X \leq 48) = 0{,}9083$
3. X = Anzahl der Mitarbeiter, die mit dem Fahrrad kommen; $n = 50$
    1. $p = 0{,}4$; $P(X \leq 20) = 0{,}5610$
    2. $p = 0{,}4$; $P(X \leq k) \geq 0{,}99 \Rightarrow k \geq 28$. Mindestens 28 Parkplätze müssen zur Verfügung gestellt werden.
    3. $p= 0{,}6$; $k \geq 38$
4. X = Anzahl der Sechsen; $p = 0{,}3$
    1. $n = 100$
       $P(A) = P(X \leq 25) = 0{,}1631$
       $P(B) = P(X \leq 49) = 1{,}0000$
       $P(C) = P(X \leq 33) = 0{,}7793$
       $P(D) = P(X \leq 15) \cdot P(X \leq 15) = 0{,}5692 \cdot 0{,}5692 = 0{,}3240$ (je mit $n = 50$)
    2. $k = 4$: $P(11 \leq X \leq 19) = 0{,}8363 < 0{,}9$
       $k = 5$: $P(10 \leq X \leq 20) = 0{,}9120 > 0{,}9 \Rightarrow I = [10;20]$