Wachstum und Veränderung

Typen von Wachstumsvorgängen

Charakteristisch ist die momentane Wachstumsrate bzw. die momentane Änderung

Typ A: Die momentane Wachstumsrate ist konstant: $f'(t) = k$

- ⇨ rückkoppelungsfreies Wachstum
- ⇨ Funktion: $f(t) = k \cdot t + f(t_0) = f'(t) \cdot t + f(t_0)$
- ⇨ Graph: Potenzfunktion (Gerade)

Typ B: Die momentane Zuwachsrate ist zum vorhandenen Bestand proportional:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

- ⇨ Rückkoppelung
- ⇨ $\dfrac{f'(t)}{f(t)} = k \xrightarrow{\text{ist Stammfunktion zu}} \ln|f(t)| = k \cdot t + c$
- ⇨ $\ln|f(t)| = k \cdot t + c \xrightarrow{\text{aufgelöst}} f(t) = e^{k \cdot t + c} = f(t_0) \cdot e^{k \cdot t}$
- ⇨ natürliches Wachstum für k > 0 oder natürlicher Zerfall für k < 0
- ⇨ Halbwertzeit: $t = \dfrac{\ln(2)}{k}$

Herleitung:

$$f(t) = f(t_0) \cdot e^{kt} \xrightarrow{\text{Verdoppelung von } f(t_0)} 2f(t_0) = f(t_0) \cdot e^{kt}$$

$$\xrightarrow{:f(t_0)} 2 = e^{kt} \xrightarrow{\ln} t = \frac{\ln(2)}{k}$$

- ⇨ Graph: e-Funktion
- ⇨ Ursprung: MALTHUS (1766 – 1834 – „Kampf ums Dasein“)

Typ C: Die momentane Wachstumsrate ist zum „Sättigungsmanko“ S – f(t) proportional:

$$f'(t) = k \cdot [S - f(t)]$$

=> $\dfrac{-f'(t)}{S - f(t)} = -k \xrightarrow{\text{ist Stammfunktion zu}} \ln|S - f(t)| = -k \cdot t + c$

$$\ln|S - f(t)| = -k \cdot t + c \xrightarrow{c = S - f(t_0)} f(t) = S - [S - f(t_0)]e^{-k \cdot t}$$

=> Fall 1: f(0) < S heißt beschränktes Wachstum

=> Fall 2: f(0) > S heißt beschränkter Zerfall

=> Graph: streng monoton steigend / fallend mit oberer / unterer Schranke

Typ D: Die momentane Wachstumsrate ist sowohl zum jeweiligen Bestand f(t) (Funktionswert) als auch zum „Sättigungsmanko“ S – f(t) proportional:

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot [S - f(t)]$$

$$\frac{-f'(t)}{f(t) \cdot [S - f(t)]} = k$$

$$\frac{1}{f(t) \cdot [S - f(t)]} = \frac{1}{S} \cdot \left[\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{S - f(t)}\right]$$

allgemein gilt dann:

$$\frac{-f'(t)}{f(t) \cdot [S - f(t)]} = \frac{f'(t)}{f(t)} - \frac{-f'(t)}{S - f(t)} = k \cdot S$$

$$\xrightarrow{\text{ist Stammfunktion zu}} \ln|f(t)| - \ln|S - f(t)| \overset{\ln-\text{Gesetz}}{=} \ln\left|\frac{f(t)}{S - f(t)}\right| = k \cdot S \cdot t + c$$

$$\xrightarrow{\text{aufgelöst}} f(t) = \frac{S \cdot f(t_0)}{f(t_0) + [S - f(t_0)] \cdot e^{-k \cdot S \cdot t}}$$

=> Logistisches Wachstum nach Pierre-Francois VERHULST (1804 – 1849)