NAME: VORNAME:

WTR – Aufgabe

1 Für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion $f_k : x \mapsto k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

a Geben Sie das Verhalten von f_k für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ an.

b Berechnen Sie die Nullstellen von f_k.

c Berechnen Sie denjenigen Wert von k, für den sich die x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_k um 6 unterscheiden. Geben Sie die beiden Extrempunkte auch an.
Nutzen Sie dazu, dass gilt: $f_k'(x) = 3 \cdot (kx - 1) \cdot (kx - 3)$.

d Für jeden Wert von k wird die Tangente an G_k im Wendepunkt $\left(\frac{2}{k} \mid \frac{2}{k}\right)$ betrachtet. Zeigen Sie, dass die Tangenten für unterschiedliche Werte von k parallel zueinander sind.

e Abbildung 1 zeigt für einen bestimmten Wert von k den Graphen von f_k sowie den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = f_k(x) + d$ mit $d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ordnen Sie die beiden Funktionen jeweils einem der beiden Graphen I und II zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung und bestimmen Sie die Werte von k und d.

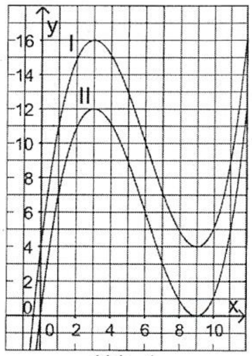


Abb. 1

Abbildung 2 zeigt den Graphen G_1 von f_1. Betrachtet werden die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen L und M mit
$L(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt$ und $M(x) = \int_3^x f_1(t)\,dt$.

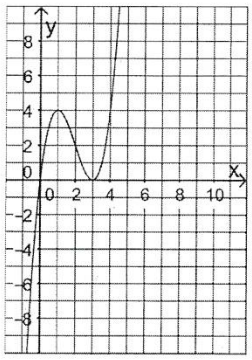


Abb. 2

NAME: VORNAME:

1 f Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Punkt $(0|0)$ Tiefpunkt des Graphen der Funktion L ist.

g Geben Sie zwei besondere Eigenschaften des Graphen von L bei $x = 3$ an. Begründen Sie jeweils Ihre Angabe.

h Begründen Sie, dass der Graph der Funktion M aus dem Graphen der Funktion L durch eine Verschiebung in negative y-Richtung hervorgeht.

2 Betrachtet wird eine große rotationssymmetrische Schale, die aus einem Steinblock gefertigt wurde. Ein Kubikmeter des Steins hat eine Masse von 2700 kg.

In einem Koordinatensystem kann ein Querschnitt der Schale mithilfe der Graphen der folgenden Funktionen modellhaft dargestellt werden:

$p: x \mapsto \sqrt{6x}$, $0 \le x \le 6$ $\qquad q: x \mapsto \sqrt{4x-8}$, $2 \le x \le 6$

Dabei beschreibt die x-Achse die Rotationsachse der Schale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 dm (vgl. Abbildung 3).

0,1 m

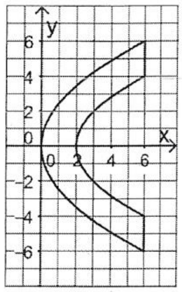


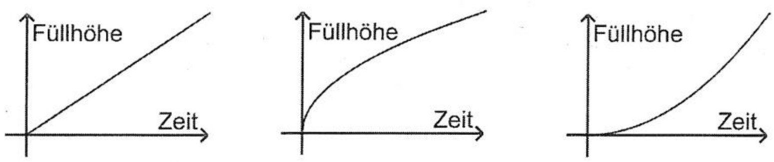
Abb. 3

$1\,m^3 \hat{=} 2700$ kg

$1\,dm^3 \hat{=} 2{,}7$ kg

a Interpretieren Sie den Term $p(6) - q(6)$ im Sachzusammenhang.

b In die aufrecht stehende Schale wird mit konstanter Zuflussrate Wasser gefüllt. Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen I, II und III für diesen Vorgang die Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.



I II III

c Berechnen Sie die Masse der Schale.

Nur für Lehrkräfte!

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte, korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

			BE
1	a	$\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$	2
	b	$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{3}{k}$	4
	c	$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = \frac{3}{k}$, $\frac{3}{k} - \frac{1}{k} = 6 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$ $E_1(3\,\vert\,12); E_2(9\,\vert\,0)$	5
	d	Für jeden Wert von k ist die Steigung der betrachteten Tangente $f_k'\left(\frac{2}{k}\right) = -3$.	3
	e	I: h, II: f_k Begründung: Nur der Graph II verläuft durch den Koordinatenursprung. Die Lage der Nullstellen liefert $k = \frac{1}{3}$. Der Schnittpunkt des Graphen I mit der y-Achse liefert $d = 4$.	4
	f	Argumentation z. B. über Vorzeichenwechsel: $L(0) = 0$, $L'(x) = f_1(x)$, $f_1(0) = 0$, $f_1(x) < 0$ für $x < 0$, $f_1(x) > 0$ für $x > 0$	3
	g	♦ Die Tangente an den Graphen von L im Punkt $(3\,\vert\,L(3))$ verläuft parallel zur x-Achse. Begründung: $f_1(3) = 0$ ♦ Der Graph von L besitzt im Punkt $(3\,\vert\,L(3))$ einen Wendepunkt. Begründung: Der Graph von f_1 hat im Punkt $(3\,\vert\,f_1(3))$ einen Tiefpunkt.	3
	h	$M(x) = L(x) - \int_0^3 f_1(t)\,dt$	2

		Der Abbildung ist zu entnehmen, dass $\int_0^3 f_1(t)\,dt > 0$ gilt.	
2	**a**	Der Term gibt die Breite des Rands der Schale in Dezimetern an.	2
	b	Graph II Begründung: Da der Durchmesser der Schale nach oben hin zunimmt, nimmt die Änderungsrate der Füllhöhe mit der Zeit ab.	2
	c	$\pi \cdot \int_0^6 (p(x))^2\,dx - \pi \cdot \int_2^6 (q(x))^2\,dx = \pi \cdot \left[3x^2\right]_0^6 - \pi \cdot \left[2x^2 - 8x\right]_2^6 = 76\pi$ $76\pi \cdot 2{,}7 \approx 645$, d. h. die Masse der Schale beträgt etwa 645 kg.	6
			36

Standardbezug

Teil-aufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungs-bereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	X			X						I		X		
b	4	X			X						I		X		
c	5	X			X			I			II			X	
d	3		X	X	X		II				II	I		X	
e	4				X		II			II	II			X	
f	3				X		II			II	II			X	
g	3				X		III			II	II				X
h	2			X	X		III			II	II				X
2 a	2		X	X	X		I		I			I	X		
b	2			X	X		II			II		II		X	
c	6		X	X	X			III	II		III				X
													8	17	11

Bewertungshinweise Mathematik Analysis:

- Die zentrale Analysis-Aufgabe hat 36 Bewertungseinheiten (BE). Diese entsprechen einem Zeitansatz von 80 Minuten. Den Teilaufgaben des Erwartungshorizontes sind die entsprechenden BE zugeordnet.
  Den beiden eigenen Aufgaben müssen nicht je 36 BE zugeordnet werden.

- Die zentrale Analysis-Aufgabe zählt in der Gesamtleistung genau 1/3.
  Die beiden eigenen Aufgaben sollen in etwa gleichgewichtet sein und ergeben zusammen genau 2/3 der Gesamtleistung.

- Die Berechnung der Gesamtleistung (in %) erfolgt ohne Runden gemäß folgender Vorschrift:

$$\text{Gesamtleistung (in \%)} = \frac{\left(2 \cdot \frac{E_{eig}}{G_{eig}} + \frac{E_{zent}}{36}\right)}{3} \cdot 100$$

  E_{eig}: Summe der erreichten BE der beiden eigenen Aufgaben

  G_{eig} : Summe der BE der beiden eigenen Aufgaben

  E_{zent} : erreichte BE der zentralen Aufgabe

- Erst am Ende werden die Notenpunkte gemäß folgender Tabelle bestimmt:

Notenpunkte	mind. zu erreichender Anteil an der insgesamt zu erreichenden Gesamtleistung (in %)
15	95,0
14	90,0
13	85,0
12	80,0
11	75,0
10	70,0
09	65,0
08	60,0
07	55,0
06	50,0
05	45,0
04	40,0
03	33,0
02	27,0
01	20,0
00	0,0

Teil 1

WTR-Aufgabe

Aufgabe 1

$$f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x \qquad x \in \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{R}^+$$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{k^2x^3}_{-\infty} - \underbrace{6kx^2}_{-\infty} + \underbrace{9x}_{-\infty}$ $\rightarrow$ Grenzwert $-\infty$ ✓

(k hat hier keinen Einfluss, da es nur positiv ist)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{k^2x^3}_{+\infty} - \underbrace{6kx^2}_{-\infty} + \underbrace{9x}_{+\infty}$ $\rightarrow$ Grenzwert $+\infty$ ✓

b) $f_k(x)=0$

$$k^2x^3 - 6kx^2 + 9x = 0$$

$$x \cdot (k^2x^2 - 6kx + 9) = 0$$

$x_1 = 0$

$$k^2x^2 - 6kx + 9 = 0$$

abc-Formel: $a = k^2$, $b = -6k$, $c = 9$

$$x_{2/3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{2/3} = \frac{6k \pm \sqrt{(-6k)^2 - 4 \cdot k^2 \cdot 9}}{2k^2}$$

$$x_{2/3} = \frac{6k \pm \sqrt{36k^2 - 36k^2}}{2k^2}$$

$$x_{2/3} = \frac{6k \pm 0}{2k^2}$$

$$x_{2/3} = \frac{3}{k}$$

$NS_1\ (0/0)$

$NS_2\ (\frac{3}{k}/0)$ $\rightarrow$ doppelte NS

c) $f_k'(x) = 3 \cdot (kx-1) \cdot (kx-3) = 0$

$3 \cdot (kx-1) = 0 \quad | :3$

$kx - 1 = 0 \quad | +1$

$kx = 1 \quad | :k$

$x_1 = \frac{1}{k}$ ✓

$kx - 3 = 0 \quad | +3$

$kx = 3 \quad | :k$

$x_2 = \frac{3}{k}$ ✓

$f_k'(x) = (3kx - 3) \cdot (kx - 3)$

$f_k''(x) = 3k \cdot (kx-3) + (3kx-3) \cdot k$

$f_k''(x) = 3k^2x - 9k + 3k^2x - 3k$

$f_k''(x) = 3k^2x \cdot (-9k - 3k)$

$f_k''(x) = 3k^2x \cdot (-12k)$

$f_k''\left(x = \frac{1}{k}\right) = \frac{3k^2}{k} \cdot (-12k) = -3k \cdot 12k = -36k^2 < 0$

$\rightarrow$ HP

$f\left(x = \frac{1}{k}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^3 - 6k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + 9 \cdot \frac{1}{k}$

$= \frac{k^2}{k^3} - \frac{6k}{k^2} + \frac{9}{k} = \frac{1}{k} - \frac{6}{k} + \frac{9}{k} = \frac{4}{k}$

$\boxed{\text{Hochpunkt } \left(\frac{1}{k} / \frac{4}{k}\right)}$ ✓

$f_k''\left(x = \frac{3}{k}\right) = 3k^2 \cdot \frac{3}{k} \cdot (-12k) = -9k \cdot 12k$

$f\left(x = \frac{3}{k}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{3}{k}\right)^3 - 6k \cdot \left(\frac{3}{k}\right)^2 + 9 \cdot \frac{3}{k}$

$= \frac{27k^2}{k^3} - \frac{54k}{k^2} + \frac{27}{k}$

$= \frac{27}{k} - \frac{54}{k} + \frac{27}{k} = 0$ $\boxed{\text{Tiefpunkt } \left(\frac{3}{k} / 0\right)}$

$x_1 = \frac{1}{k} \qquad x_2 = \frac{3}{k}$

$$\frac{1}{k} + 6 = \frac{3}{k} \qquad \Big| -\frac{1}{k}$$

$$6 = \frac{3}{k} - \frac{1}{k}$$

$$6 = \frac{2}{k} \qquad | \cdot k$$

$$6k = 2 \qquad | :6$$

$$\boxed{k = \frac{1}{3}} \quad \rightarrow \; HP(3\,|\,12) \quad TP(9\,|\,0)$$

✓ ✓ ✓

d) Wendepunkt $\left(\frac{2}{k} \,\middle|\, \frac{2}{k}\right)$ $\qquad f_k'(x) = 3 \cdot (kx-1) \cdot (kx-3)$

Tangenten parallel $\Rightarrow$ gleiche Steigung

$$m = f_k'\left(\frac{2}{k}\right) = 3 \cdot \left(k \cdot \frac{2}{k} - 1\right) \cdot \left(k \cdot \frac{2}{k} - 3\right)$$

$$= 3 \cdot (2-1) \cdot (2-3)$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= \underline{\underline{-3}}$$

✓

$\rightarrow$ Die Steigung im Wendepunkt ist unabhängig von k, d.h. alle Tangenten am Wendepunkt haben die Steigung -3 und sind somit parallel.

e) Graph I ✓ | Graph II ✓

Graph I:

- $h_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x + d$
- $d = 4$ ✓, da das der Schnittpunkt mit der y-Achse ist
- $k = \frac{1}{3}$ ✓, weil $h_k(x)$ den gleichen Verlauf hat wie $f_k(x)$, nur eben um 3 nach oben verschoben

Graph II:

- $f_k(x) = k^2x^3 - 6kx^2 + 9x$
- Nullstelle bei $(0/0)$, daher wäre hier $d=0$
- Tiefpunkt ist bei $\left(\frac{3}{k}\middle|0\right)$, ✓ also ist $k = \frac{1}{3}$ ✓ (in der Abbildung TP bei $(9/0)$) ✓

$\boxed{k=1}$

$$L(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt \qquad M(x) = \int_3^x f_1(t)\,dt$$

$$f_1(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad F_1(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$$

$$L(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^x \qquad M(x) = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_3^x$$

$$L(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \qquad M(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6{,}75$$

f) $L'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = 0$ (→ vgl. Nullstelle von $f_k(x)$)

$x = 0$

$L''(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$L''(0) = 9 > 0$ → Tiefpunkt $(0/0)$ ✓

Wenn man $L(x)$ ableitet, erhält man die Funktion $f_1(x)$, die eine Nullstelle bei $(0/0)$ hat. Daher muss auch ein Extrema der Funktion $L(x)$ dort liegen. ✓

Teil 2

WTR - Aufgabe

g) $L(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$

$L(3) = \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^3 + \frac{9}{2} \cdot 3^2 = 6{,}75$ ✓

$L'(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0$ ✓

$L''(3) = 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 9 = 0$ ✓

→ bei $x = 3$ ✓ (im Punkt $(3/6{,}75)$) sind die Steigung und die Krümmung der Funktion Null, d.h. hier befindet sich ein Sattelpunkt. ✓

h) $L(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2$ $\quad M(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6{,}75$

→ Wie man sehen kann, sind die Funktionen fast identisch, allerdings wurde bei $M(x)$ „$-6{,}75$" ergänzt, was zu einer Verschiebung des Graphen in die negative y-Richtung führt. ✓

Aufgabe 2

$1m^3 \hat{=} 2700\,kg$ 1 Längeneinheit $\hat{=}$ 1 dm

$p(x) = \sqrt{6x}$ $0 \leq x \leq 6$

$q(x) = \sqrt{4x-8}$ $2 \leq x \leq 6$

a) $p(6) - q(6) = \sqrt{6 \cdot 6} - \sqrt{4 \cdot 6 - 8} = 2$

$\Rightarrow$ Dieser Term bezieht sich auf die Dicke der Schale (2 dm). ✓

b) Graph II ✓

↳ Da die Schale unten einen geringeren Durchmesser hat als oben am Rand, steigt die Füllhöhe zuerst sehr schnell und dann immer langsamer, wie es auch in Graph II zu sehen ist. ✓

Teil 3

WTR-Aufgabe

Aufgabe 2

c) $V = \pi \int_a^6 [f(x)]^2 \, dx$

$V = V_p - V_q$

$V_p = \pi \int_0^6 6x \, dx = \pi \cdot \left[3x^2\right]_0^6$

$= \pi \cdot 3 \cdot 6^2 = 108\pi$

$V_q = \pi \cdot \int_2^6 (4x-8) \, dx = \pi \cdot \left[2x^2 - 8x\right]_2^6$

$= \pi \cdot \left(\left[2 \cdot 6^2 - 8 \cdot 6\right] - \left[2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2\right] \right)$

$= \pi \cdot (24 + 8)$

$= 32\pi$

$V = 108\pi - 32\pi = 76\pi \text{ dm}^3 = 0{,}238761 \text{ m}^3$

$\frac{76\pi}{1000} \text{ m}^3 \mathrel{\hat{=}} \boxed{644{,}6548 \text{ kg}}$